
Application des séries entières au calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right)$

Récasage : 230 / 241 / 243

Référence : Orlaux X-ENS Analyse 2 Francinou-Gianella-Nicolas

Developpement 1

La série de terme générale $\frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{\pi^2}{16}$

Preuve.

On commence naturellement par démontrer la convergence de la série.

Etape 1 : On souhaite ici appliquer le théorème sur les séries alternées pour la suite $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}$

vérifions les hypothèses : On remarque que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \geq \frac{n+1}{2n+1} \Rightarrow u_n \geq \frac{1}{2n+1}$

- Montrons que u_n est décroissante, par définition $u_{n+1} = \frac{1}{n+2} \left((n+1)u_n - \frac{1}{2n+3} \right)$. Il vient que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+2} \left((n+1)u_n - \frac{1}{2n+3} \right) - u_n \\ &= \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{2n+3} - u_n \right) \end{aligned}$$

Or $u_n \geq \frac{1}{2n+1}$ ce qui implique que $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- Montrons que u_n tend vers 0, on trouve un équivalent très simple de la suite u_n grâce au fait que $H_n \sim_{\infty} \ln(n)$ (faire exprès de ne pas trop détaillé, on sait jamais ça peut être une question facile de jury post développement).

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = \sum_{j=1}^{2n+1} \frac{1}{j} \sim_{\infty} \ln(2n+1) \sim_{\infty} \ln(n) \Rightarrow u_n \sim_{\infty} \frac{\ln(n)}{n+1}$$

Ce qui suffit pour affirmer que u_n tend vers 0. En vertu du théorème sur les séries alternées la série de terme générale $(-1)^n u_n$ est convergente.

Etape 2 : Pour ce qui est du calcul de la série on introduit la série entière $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n x^n$. Il convient de s'intéresser dans un premier temps au rayon de convergence de la série entière. On utilise le critère de d'Alembert pour le déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \frac{\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2k+1}}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \left(1 + \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} (2n+3)} \right) \right| = 1$$

Ainsi en vertu du critère de d'Alembert le rayon de convergence de la série est 1. De plus on a vu que la série converge en $x = 1$.

Démontrons à présent que la fonction g est continue sur $[0, 1]$, comme la série de terme générale $(u_n x^n)$ vérifie les conditions pour appliquer le théorème sur les séries alternées. le reste vérifie donc $\forall x \in [0, 1] |R_n(x)| \leq u_n x^n \leq u_n$ or u_n tend vers 0 ce qui nous assure une convergence uniforme de la série sur $[0, 1]$. On peut donc affirmer que g est continue sur $[0, 1]$.

On va donc maintenant déterminer la valeur de $g(x)$. Au vue de l'expression on pense immédiatement au produit de Cauchy de deux séries entières : $\forall x \in]-1; 1[$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{2n+1} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{2k+1} (-x)^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) u_n (-x)^n \end{aligned}$$

Or on connaît la somme de ces deux séries entières et on obtient que $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) u_n (-x)^n = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}$. En intégrant sur le segment $[0, x]$ on obtient :

$$xg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n x^{n+1} = \int_0^x \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}(1+t)} dt$$

Par continuité de g en 1 on obtient que $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right) = \int_0^1 \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}(1+t)} dt$. En posant le changement de variable $u = \sqrt{t}$ on obtient :

$$\int_0^1 \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}(1+t)} dt = \int_0^1 \frac{2 \arctan(u)}{1+u^2} du = \left[\arctan(u)^2 \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{16}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{\pi^2}{16}}$$

■

Lemme 1 (Critère d'Abel)

Soit (a_n) et (b_n) deux séries numériques telles que :

- La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle, décroissante et de limite nulle.
- La suite (b_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit telle que la suite (B_n) des sommes partielles soit bornée.

Alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

Preuve.

La démonstration consiste à effectuer une transformation d'Abel en écrivant que

$$b_n = \sum_{k=0}^n b_k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k = B_n - B_{n-1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^N a_n b_n &= a_0 b_0 + \sum_{n=0}^N a_n b_n \\ &= a_0 b_0 + \sum_{n=1}^N a_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= a_0 b_0 + \sum_{n=1}^N a_n B_n - \sum_{n=1}^N a_n B_{n-1} \\ &= a_0 b_0 + \sum_{n=1}^N a_n B_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} B_n \\ &= a_0 b_0 + a_N b_N - a_1 b_0 + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_N b_N \end{aligned}$$

Or la suite (a_n) tend vers 0 par hypothèse et la suite B_n est bornée on en conclut que $a_N b_N \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Ainsi la $\sum a_n b_n$ converge si et seulement si $\sum (a_n - a_{n+1}) B_n$. De plus comme la (B_n) est bornée (on va appeler M un majorant de B_n). On a par décroissance de la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |(a_n - a_{n+1}) B_n| \leq |a_n - a_{n+1}| M = (a_n - a_{n+1}) M$$

Or la série de terme générale $a_n - a_{n+1}$ est convergente car de même nature que la suite (a_n) . Ainsi par comparaison des séries à termes positifs la série $\sum (a_n - a_{n+1}) B_n$ converge et donc il en va de même pour $\sum a_n b_n$

■

Remarque.

On remarques donc que le critère d'Abel est une extension du critère spécial sur les séries alternées ainsi en posant dans le critère d'Abel $b_n = (-1)^n$ dont les sommes partielles sont bien bornées retrouve le critère.

Comment retrouver le développement en série entière de $x \mapsto \arctan(x)$?

Il suffit de remarquer que $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ d'ou pour $x < 1$ on obtient $\arctan(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. L'interversion est donnée par la convergence uniforme sur le compact $[0; x]$ (une série entière converge normalement sur tout compacte de son rayon de convergence).