
Théorème de Burnside

Référence : Algèbre 2 Orlaux X-ENS page 185

Recasage : 104 / 106 / 149 / 157 / 153 / 162

On rappelle que $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}$

Définition. Un sous groupe de G de $GL_n(\mathbb{C})$ est d'exposant $N \in \mathbb{N}$ si $\forall A \in G \ A^N = I$

Lemme 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Tr}(A^k) = 0$. Alors A est nilpotente.

Preuve.

Comme A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son polynôme caractéristique est scindé, en particulier elle est trigonalisable. Par l'absurde supposons que A ne soit pas nilpotente. Alors A admet des valeurs propres (complexes) non nulles. On note alors $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ces valeurs propres distinctes non nulles de A ($r \geq 1$) et $n_1, \dots, n_r$ les multiplicités respectives. Comme A est trigonalisable, elle est semblable à une matrice triangulaire avec sur la diagonale $(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{=n_1}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{n_r}, 0, \dots, 0)$. Ainsi par hypothèse $\forall k \geq 1$:

$$\text{Tr}(A^k) = n_1 \lambda_1^k + \dots + n_r \lambda_r^k = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i^k = 0$$

Ainsi le vecteur $(n_1, \dots, n_r)$ est solution du système linéaire suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or le déterminant de la matrice M est non nul en effet ce dernier vaut $\prod_{k=1}^r \lambda_r \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$. (Déterminant de Vandermonde). On a donc $n_1 = \dots = n_r = 0$ ce qui est absurde. Ainsi 0 est la seule valeur propre de M . Alors le polynôme caractéristique de A vaut X^n et par le théorème de Cayley Hamilton $A^n = 0$ donc A est nilpotente. ■

Remarque. Ce résultat peut se généraliser pour un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle et algébriquement clos ! Par exemple dans $\mathbb{F}_2$ la matrice I_2 n'est pas nilpotente mais $\text{Tr}(A) = 0$

Théorème 1

Soit G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. Si G est d'exposant fini alors G est fini.

Preuve.

On se donne G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini N . Soit $(M_i)_{1 \leq i \leq m} \in G^m$ une base de $\text{vect}(G)$. On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow \mathbb{C}^m \\ A &\longmapsto (\text{Tr}(AM_i))_{1 \leq i \leq m} \end{aligned}$$

Etape 1 : Montrons que toutes les matrices du sous groupe G sont diagonalisables.

Toutes les matrices de G sont annihilées par le polynôme $X^N - 1$ qui est un polynôme annulateur scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$. Ainsi toute matrice de G est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Etape 2 : Montrons que si $\forall A, B \in G$ $f(A) = f(B)$ alors $AB^{-1} - I$ est nilpotente.

Comme $f(A) = f(B)$ on a $\forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket$ $\text{Tr}(AM_i) = \text{Tr}(BM_i)$. Soit $M \in G$ alors on décompose M dans la base $(M_i)_{1 \leq i \leq m}$ tel que $M = \sum_{k=1}^m \lambda_i M_i$. Alors par linéarité de la Trace.

$$\text{Tr}(AM) = \text{Tr}\left(\sum_{k=1}^m \lambda_i AM_i\right) = \sum_{k=1}^m \lambda_i \text{Tr}(AM_i) = \sum_{k=1}^m \lambda_i \text{Tr}(BM_i) = \text{Tr}(BM)$$

Donc $\text{Tr}(AM) = \text{Tr}(BM)$. On pose alors $D = AB^{-1}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\text{Tr}(D^k) = \text{Tr}(AB^{-1}D^{k-1}) = \text{Tr}(BB^{-1}D^{k-1}) = \text{Tr}(D^{k-1})$$

Donc pour $k \geq 1$ alors $\text{Tr}(D^k) = \text{Tr}(I_n) = n$:

$$\text{Tr}((D - I_n)^k) = \text{Tr}\left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j D^{k-j}\right) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \text{Tr}(D^{k-j}) = n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j = (1 - 1)^k = 0$$

D'après le lemme $D - I$ est donc nilpotente.

Etape 3 : Montrons que f est injective.

Supposons que $f(A) = f(B)$ et montrons que $A = B$. D'après ce qui précède D est une matrice diagonalisable, or $D - I$ est aussi diagonalisable. or une matrice nilpotente et diagonalisable est nulle. C'est à dire $D = I$ et donc $AB^{-1} = I \implies A = B$. Ce qui prouve l'injectivité de f .

Etape 4 : Conclusion

On pose alors $X = \{\text{Tr}(A) \mid A \in G\}$. Alors $\text{Im}(f) \subset X^m$. Mais comme X est fini, en effet les valeurs propres des éléments de G sont des racines n -ièmes de l'unité et la trace est la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicités. Ainsi X^m est fini, il en va de même pour $\text{Im}(f)$ et donc de G par injectivité de f .

■