228 : Continuité et dérivabilité
219 : Recherche d'extrema

Chemin optique et calcul des variations (FGN An 4).

Théorème : Soient $(A,B)\in(\mathbb{R}^2)^2$ et $E=\{u\in C^1([0;1];\mathbb{R}^2) \mid u(0)=A,\ u(1)=B\}$. Soit $n:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+^*$, C^2. On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel.
Si $u\in E$, on pose $F(u)=\int_{[0;1]} n(u)\|u'\|^2$ et on suppose qu'il existe $u_0\in E$ t.q. $F(u_0)=\min_{u\in E} F(u)$.
Alors u_0 est C^2 et vérifie $2n(u_0)u_0''=\|u_0'\|^2\nabla n(u_0)+2<\nabla n(u_0);u_0'>u_0'$.

Posons $F=\{v\in C^1([0;1],\mathbb{R}^2) \mid v(0)=v(1)=0\}$.
Soit $v\in F$. On pose $\varphi_v=\lambda\mapsto F(u_0+\lambda v)$. Alors φ_v admet un minimum en 0.

1) Montrons que φ est dérivable et calculons $\frac{d}{d\lambda}(\varphi_v)(0)$

Soit $\phi_v:(t;\lambda)\mapsto n(u_0(t)+\lambda v(t))\,\|u_0'(t)+\lambda v'(t)\|^2$. Alors ϕ est C^0 et différentiable par rapport à λ.

$\frac{\partial\phi_v}{\partial\lambda}=<\nabla n(u_0+\lambda v(t));v(t)>\|u_0'+\lambda v'(t)\|^2+2n(u_0(t)+\lambda v(t))<u_0'(t)+\lambda v'(t);v'(t)>$

La fonction $\frac{\partial\phi_v}{\partial\lambda}$ est continue sur $\underbrace{[0;1]\times[-A;A]}_{\text{compact}}$ ($A>0$ qcq). Elle est donc bornée sur ce compact par une constante M. Or, la fonction $(t;\lambda)\mapsto M$ est intégrable sur $[0;1]\times[-A;A]$. Par le théorème de dérivation sous le signe somme, φ_v est donc dérivable sur $[-A;A]$ et $\frac{d}{d\lambda}(\varphi_v)(\lambda)=\int_0^1\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}(t;\lambda)\,dt$ si $\lambda\in[-A;A]$.

Donc $\frac{d}{d\lambda}(\varphi_v)(0)=\int_0^1\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}(t;0)\,dt=\int_{[0;1]}<\nabla n(u_0);v>\|u_0'\|^2+2n(u_0)<u_0';v'>$.

φ_v est dérivable en 0 et admet un minimum en 0. Donc $\frac{d}{d\lambda}(\varphi_v)(0)=0$.

2) Réécriture de $\frac{d}{d\lambda}(\varphi_v)(0)$.

Notons $I=\int_{[0;1]}<\nabla n(u_0);v>\|u_0'\|^2$ et $h:t\mapsto\nabla n(u_0(t))\|u_0'(t)\|^2$.
h est C^0 sur $[0;1]$
h admet une primitive sur $[0;1]$ notée H.
On a alors que $I=\int_0^1<h(t);v(t)>dt=-\int_0^1<H(t);v'(t)>dt$
car $v(0)=v(1)=0$.

Donc $0=\frac{d}{d\lambda}(\varphi_v)(0)=\int_{[0;1]}<-H+2n(u_0)u_0';v'>$.

Lemme : Si $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est C^0 avec $\int_0^1 \langle f ; v' \rangle = 0$ pour tout v de F, alors f est constante.

4) Utilisation du lemme et u_0 est C^2

Donc $\exists c \in \mathbb{R}$ t.q. $- \cancel{H(t)} + 2 n(u_0)\, u_0'(t) = c$ $(*)$

Donc $\forall t \in [0;1]$, $u_0'(t) = \dfrac{c + H(t)}{\underbrace{2 n(u_0)}_{\neq 0,\ C^1}}$ Donc u_0' est C^1.

Donc u_0 est C^2.

5) Conclusion

En dérivant $(*)$, il vient que $-h(t) + 2 \langle \nabla n(u_0(t)) ; u_0'(t) \rangle u_0'(t) + 2 n(u_0(t))\, u_0''(t) = 0$

En remplaçant h par son expression, il vient que u_0 vérifie

$- \nabla n(u_0) \|u_0'\|^2 + 2 \langle \nabla n(u_0) ; u_0' \rangle u_0' + 2 n(u_0)\, u_0'' = 0$

Preuve du lemme (du Bois-Raymond)

Si $\forall v \in F$, $\int_0^1 \langle f(t) ; v'(t) \rangle dt = 0$. Alors $\forall c \in \mathbb{R}^2, \forall v \in F$, $\int_0^1 \langle f(t) - c ; v'(t) \rangle dt = 0$

Cherchons v_0 tel que $\begin{cases} v_0'(t) = f(t) - \int_0^1 f(s)\, ds \\ v_0(a) = v_0(b) = 0 \end{cases}$

$v_0(t) = \int_0^t f(s)\, ds - t \int_0^1 f(s)\, ds$.

$v_0(0) = 0$ et $v_0(1) = 0$ et $v_0'(t) = f(t) - \int_0^1 f(s)\, ds$.

Donc pour $\left. \begin{array}{l} c = \int_0^1 f(s)\, ds \\ v = v_0 \end{array} \right\}$, $\int_0^1 \|f(t) - c\|^2 dt = 0$.

Donc $f(t) = c$ car f est C^0.