Théorème du point fixe de Kakutani et sous-groupes compacts de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$

Théorème. *Soient E un espace euclidien, G un sous-groupe compact de $\mathbf{GL}(E)$ et K un compact convexe de E stable par G. Alors il existe $x \in E$ tel que pour tout $g \in G$, on ait $g(x) = x$.*

Démonstration : notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E, et pour tout $x \in E$, définissons

$$N(x) = \sup_{g \in G} \|g(x)\|\,;$$

cette quantité est bien définie car G est compact et ses éléments, ainsi que la norme $\|\cdot\|$, sont continus. On vérifie immédiatement que N est une norme sur E ; examinons le cas d'égalité dans son inégalité triangulaire. Soient $x, y \in E$ tels que $N(x+y) = N(x) + N(y)$ et $g_0 \in G$ tel que $N(x+y) = \|g_0(x+y)\|$. Alors

$$N(x+y) = \|g_0(x+y)\| = \|g_0(x) + g_0(y)\| \leqslant \|g_0(x)\| + \|g_0(y)\| \leqslant N(x) + N(y) = N(x+y).$$

Ces inégalités sont donc toutes des égalités, en particulier $\|g_0(x) + g_0(y)\| = \|g_0(x)\| + \|g_0(y)\|$, donc $g_0(x)$ et $g_0(y)$ sont positivement liés. Appliquant g_0^{-1}, il en va de même pour x et y.

Comme K est compact, il existe $z \in K$ tel que

$$N(z) = \inf_{x \in K} N(x) = a,$$

et un tel minimum est unique : cette affirmation est claire si $a = 0$. Si $a \neq 0$, supposons que $y \in K$ est tel que $N(y) = a$. Comme K est convexe, $\frac{y+z}{2} \in K$, donc

$$N(y) \leqslant N\left(\frac{y+z}{2}\right) \text{ et } N(z) \leqslant N\left(\frac{y+z}{2}\right)$$

puisque y et z réalisent le minimum de N sur K. Ainsi,

$$N(y) + N(z) \leqslant 2N\left(\frac{y+z}{2}\right) = N(y+z),$$

donc l'égalité dans l'inégalité triangulaire de N est réalisée, et d'après ce qui précède, y et z sont positivement liés, disons $z = \lambda y$ avec $\lambda > 0$. Alors

$$a = N(z) = N(\lambda y) = \lambda N(y) = \lambda a,$$

d'où $\lambda = 1$ puisque $a \neq 0$, et ainsi $y = z$.

Or, pour tout $g \in G$, on a

$$N(g(z)) = \sup_{h \in G} \|hg(x)\| = \sup_{h \in G} \|h(x)\| = N(z),$$

et $g(z) \in K$ puisque K est stable par G. Ainsi, par unicité du minimum de N sur K, on a $g(z) = z$ quel que soit $g \in G$. ■

Corollaire. *Tout sous-groupe compact de* $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ *est conjugué à un sous-groupe de* $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration : soit H un sous-groupe compact de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$\rho\colon \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbf{GL}(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) \\ A & \longmapsto & (S \mapsto {}^tA^{-1}SA^{-1}) \end{array} \quad ;$$

c'est un morphisme continu de groupes, donc $G = \rho(G)$ est un sous-groupe compact de $\mathbf{GL}(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))$.

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tMM \end{array}$$

étant continue, $E = \{\,{}^tMM, M \in H\}$ est un compact de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, contenu dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème de Carathéodory, son enveloppe convexe, notée K, est encore compacte, et $K \subset \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe. De plus, si $A, M \in H$, on a

$$\rho(A)({}^tMM) = {}^tA^{-1}\,{}^tMMA^{-1} = {}^t(MA^{-1})MA^{-1} \in E,$$

donc E est stable par G, donc K également.

Soit $S \in K$ un point fixe de G donné par le théorème précédent. Comme $K \subset \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, S est symétrique définie positive, donc possède une racine carrée R, elle aussi définie positive. Pour tout $A \in H$, le fait que $\rho(A)(S) = S$ entraîne donc ${}^tA^{-1}R^2A^{-1} = R^2$, ce qui s'écrit encore ${}^t(RA^{-1}R^{-1})(RA^{-1}R^{-1}) = I_n$. Ainsi, $RHR^{-1} \subset \mathbf{O}_n(\mathbb{R})$, autrement dit $H \subset R^{-1}\,\mathbf{O}_n(\mathbb{R})R$. ∎