

51 Méthode de Gauss et polynômes orthogonaux

ref : Demailly On cherche une méthode d'intégration avec un poids fixé w continu positif intégrable sur $]a, b[$ contre tout polynôme, c'est-à-dire on cherche des points (x_j) et des coefficients λ_j telle que l'approximation :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)w(x)dx \simeq \sum_{j=0}^l \lambda_j f(x_j)$$

A nombre l de points fixé, le théorème suivant nous dit comment choisir les points et les coefficients.

THÉORÈME 51.1 *Il existe un unique choix des (x_j) et (λ_j) tels que la méthode soit d'ordre $N = 2l + 1$. Les points (x_j) sont dans $]\alpha, \beta[$ et sont les racines du l -ième polynôme orthogonal pour le poids w .*

PREUVE. *Analyse :*

Soit une méthode d'ordre $\geq 2l + 1$. On introduit le polynôme :

$$\pi_{l+1} = \prod_{j=0}^l (x - x_j)$$

Pour tout p de degré $\geq l$, $\deg(p\pi_{l+1}) \leq 2l + 1$. Donc :

$$\int_0^{2\pi} p\pi_{l+1}w = \sum_{j=0}^l \lambda_j p(x_j)\pi_{l+1}(x_j) = 0$$

Donc π_{l+1} est orthogonale à $\mathbb{R}_l[X]$ et comme il est unitaire, c'est le l -ième polynôme orthogonal. Les points (x_j) sont alors les racines de ce polynôme. dont on sait qu'elles sont distinctes et dans $]a, b[$. (En effet, si m_j sont les multiplicités des racines, on prend $\epsilon_j = 1$ si m_j impair, 0 sinon, alors $\prod (X - x_j)^{\epsilon_j} p$ est de signe constant, donc $\int p_n q w > 0$, donc q est de degré n et les multiplicités valent 1.)

Soit L_i les polynômes interpolateurs de Lagrange, c'est-à-dire $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

On a alors :

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^l \lambda_j L_i(x_j) = \int L_i(x)w(x)dx$$

Les coefficients sont donc également déterminés.

Synthèse :

Vérifions que cette méthode donnée par les polynômes orthogonaux est bien d'ordre $2l + 1$. Prenons donc les racines x_j et les coefficients $\lambda_j = \int L_j w$.

Si f est de degré l , f est égal aux polynômes interpolateurs de la famille $(x_j, f(x_j))$ par unicité, donc $f = \sum_j f(x_j)L_j$, donc

$$\int f w = \sum_j f(x_j) \int L_j w = \sum_j f(x_j) \lambda_j$$

Si f est de degré $\leq 2l + 1$, on fait la division euclidienne de f par $\pi_{l+1} = \prod_j (x - x_j)$:

$$f = q\pi_{l+1} + r$$

avec r et q de degré $\leq l$. En intégrant et en utilisant le fait que π_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_l[X]$ et que la méthode est d'ordre au moins l , on trouve :

$$\int fw = \int q\pi_{n+1}w + \int rw = \int rw = \sum_j \lambda_j r(x_j)$$

Cela achève l'existence et l'unicité de la méthode. Il reste à montrer qu'elle n'est pas d'ordre plus grand. Pour cela montrons que la méthode n'est pas exacte sur le polynôme x^{2l+2} . On peut l'écrire $x^{2l+2} = \pi_{l+1}^2 + r(x)$ avec r de degré $\leq 2l+1$. Donc l'erreur vaut :

$$E(x^{2l+2}) = \int x^{2l+2}w - \sum_j \lambda_j x_j^{2l+2} = \int \pi_{l+1}^2 w > 0$$

□