$SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions

Théorème : Soit H le corps non commutatif des quaternions.
Soit G le groupe des quaternions de module 1 (norme) (i.e. $\{a+bi+cj+dk \,/\, a^2+b^2+c^2+d^2=1\}$)

On a un isomorphisme $\bar{s} : G/\{-1;1\} \longrightarrow SO_3(\mathbb{R})$.

Preuve : • On va faire agir G sur H par automorphismes intérieurs :
$G \overset{S}{\curvearrowright} H$ par $\forall q \in G$, $S_q : H \longrightarrow H$
$$q' \longmapsto qq'q^{-1} = qq'\bar{q} \quad (\text{car } q \in G).$$
On a bien défini une action car S_q est clairement $\mathbb{R}$-linéaire et bijective ($S_q^{-1} = S_{\bar{q}}$) et on a ainsi une application $S : G \longrightarrow GL_4(\mathbb{R})$
$$q \longmapsto S_q$$

• Si $q_1, q_2 \in G$, $q' \in H$, $S_{q_1 q_2}(q') = (q_1 q_2)\, q' \,(\overline{q_1 q_2}) = q_1 (q_2 q' \bar{q_2}) \bar{q_1}$
$= S_{q_1}(S_{q_2}(q'))$.
Donc S est un homomorphisme.

Thm : $Z(H) = \mathbb{R}$.

Si $S_q = id$, alors $\forall q' \in H$, $S_q(q') = q'$, i.e. $qq' = q'q$ et $q \in Z(H) \cap G$ et donc $q \in \mathbb{R} \cap G = \{-1;1\}$. Donc $\operatorname{Ker} S = \{-1;1\}$.

• S_q conserve la norme N si $q \in G$. En effet, si $q' \in H$,
$N(S_q(q')) = N(qq'\bar{q}) = N(q)\, N(q')\, N(\bar{q}) = N(q')$ car $N(q) = 1$.
Donc $\forall q \in G$, S_q est un élément du groupe orthogonal de $(\mathbb{R}^4; N)$, i.e. un élément de $O_4(\mathbb{R})$.

• Notons $P = \{bi+cj+dk ; (b;c;d) \in \mathbb{R}^3\}$ l'ensemble des quaternions purs.
C'est exactement l'orthogonal de $\mathbb{R}$ pour le produit scalaire dont provient N.
Comprendre S_q, c'est comprendre $S_{q|\mathbb{R}}$ et $S_{q|P}$.
- $S_{q|\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}}$ car $\mathbb{R} = Z(H)$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_q(x) = qxq^{-1} = x$.
- Donc S_q laisse stable P car $S_q \in O_4(\mathbb{R})$
- On peut alors poser $s_q = S_{q|P}$. s_q conserve également la norme

et est donc un élément de $O(P; N_{|P}) \simeq O_3(\mathbb{R})$

On considère donc le morphisme $s : G \longrightarrow O_3(\mathbb{R})$ qui est bien un homomorphisme de noyau $\{-1; 1\}$.

• s est continue : En effet, si $q = a + bi + cj + dk$, on peut calculer les coefficients de la matrice de s_q dans la base $(i; j; k)$, par ex. $s_q(i) = q\, i\, \bar{q}$

$$s_q(i) = (ai - b - ck + dj)(a - bi - cj - dk)$$
$$= [ab - ab - cd + cd] + i[a^2 + b^2 - c^2 - d^2] + 2j[ad + bc] + 2k[-ac + bd]$$

Les coefficients de s_q sont donc des polynômes homogènes de degré 2.
Si on munit $O_3(\mathbb{R})$ de sa topologie naturelle, s_q est bien continue.
Or, $\det(\cdot)$, le déterminant, est continu. Donc $\det \circ s_q$ l'est et G est connexe (c'est la sphère unité de $\mathbb{R}^4$ pour N)
Donc $\det \circ s(G)$ l'est aussi et est inclus dans $\{-1; 1\}$. L'image de $s(G)$ par le déterminant est donc un singleton et $\det(s(1)) = \det(id) = 1$.
Donc l'image de s est incluse dans $SO_3(\mathbb{R})$.

• s est surjective : On va montrer qu'on a tous les renversements dans $s(G)$.
Vu que les renversements engendrent $SO_3(\mathbb{R})$, on aura que s est surjective.
Si $p \in P \cap G$, $s_p(p) = p$. s_p fixe l'axe $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(p)$ et est donc une rotation d'axe $\langle p \rangle$. Or, $p \in P$. Donc $p^2 = p \times (-\bar{p}) = -p\bar{p} = -1$.
Donc $s_{p^2} = s_{-1} = id = (s_p)^2$. Donc s_p est une involution, c'est le renversement d'axe $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(p)$. Donc $\forall p \in P$, le renversement d'axe $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(p)$ est dans l'image de s, i.e. $s(G)$ contient tous les renversements.

• En passant au quotient, on obtient un isomorphisme $\bar{s} : G/_{\{-1;1\}} \longrightarrow SO_3(\mathbb{R})$

Remarque

* Corollaire : $SU_2(\mathbb{C})/_{\{-1;1\}} \simeq SO_3(\mathbb{R})$

Preuve : $\mathbb{C}$ est un sous corps de H, une $\mathbb{C}$-base de H étant $(1; j)$.
Faisons agir $G \circlearrowright H$: $q \longmapsto [T_q : q' \longmapsto qq']$. $\forall q \in G$, $T_q \in GL_2(\mathbb{C})$
De plus, si $q = 1\lambda + j\mu$, alors $T_q = \begin{pmatrix} \lambda & -\bar{\mu} \\ \mu & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$ et $\det T_q = 1$. Donc $T_q \in SU_2(\mathbb{C})$
et $T : G \longrightarrow SU_2(\mathbb{C})$ est un isomorphisme !

* On a un paramétrage de $SO_3(\mathbb{R})$ par les quaternions de norme 1 (tout comme $\mathbb{U}$ donnait un paramétrage de $SO_2(\mathbb{R})$)

* En faisant agir $G \times G \circlearrowright H$, on en trouve un de $SO_4(\mathbb{R})$.