

10 Lemme de Morse

ref : Rouvière

THÉORÈME 10.1 *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ telle que $f(0) = 0$, $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ soit non dégénérée de signature (p, q) . Alors il existe θ un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme d'un voisinage de 0 tel que*

$$f \circ \theta^{-1}(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$$

PREUVE. En prenant une base orthogonale pour $d^2f(0)$ (c'est-à-dire par un changement de coordonnées linéaire inversible), on peut se ramener à $d^2f(0) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$, ce que nous faisons. On applique la formule de Taylor à l'ordre 2 à f au voisinage de 0, c'est possible car f est de classe $\mathcal{C}^2$.

$$f(x) = \int_0^1 d^2f(tx)(x, x)dt = {}^t x Q(x) x$$

où $Q(x) = \int_0^1 d^2f(tx)dt$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ (car f est $\mathcal{C}^3$ et par dérivation sous le signe intégral) d'un voisinage de 0 à valeurs dans $S(n, \mathbb{R})$. On est conduit à étudier des familles paramétrées de formes quadratiques. On a le lemme suivant :

LEMME 10.2 *Soit $S_0 \in S(n, \mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible, il existe un voisinage ouvert V de S_0 dans $S(n, \mathbb{R})$ et φ une application $\mathcal{C}^\infty$ de V dans $GL(n, \mathbb{R})$ telle que :*

$$\forall S \in V, \quad {}^t\varphi(S)S_0\varphi(S) = S_0$$

PREUVE. On définit la fonction $\Psi : S(n, \mathbb{R}) \times \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \rightarrow S(n, \mathbb{R})$ par

$$\psi(S, M) = {}^t M S M$$

On remarque que Ψ est $\mathcal{C}^\infty$, que $\Psi(S_0, I_n) = S_0$ et que l'objet du lemme est d'étudier le niveau $\Psi^{-1}(S_0)$ au voisinage de (S_0, I_n) . On cherche à exprimer M en fonction de S , il faut donc regarder la dérivée partielle par rapport à M :

$$L(H) = \frac{\partial \Psi}{\partial M}(S_0, I_n) \cdot H = {}^t H S_0 + S_0 H$$

Le noyau de cette application linéaire $\mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \rightarrow S(n, \mathbb{R})$ est exactement $S_0^{-1}A(n, \mathbb{R})$. En effet, $H \in \ker L$ si et seulement si $S_0 H$ est antisymétrique. On prend alors un supplémentaire vectoriel du noyau, un choix évident est $H = S_0^{-1}S(n, \mathbb{R})$. On restreint Ψ au sous-espace $S(n, \mathbb{R}) \times H$ qui contient (S_0, I_n) car S_0 est symétrique. (On a pas besoin de translater H ce qu'on pouvait s'attendre à devoir faire). Ainsi on peut résoudre l'équation $\Psi(S, M) = S_0$ au voisinage de (S_0, I_n) par le théorème des fonctions implicites : Il existe une application φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'un voisinage ouvert de S_0 dans $S(n, \mathbb{R})$ dans $GL(n, \mathbb{R})$ (quitte à restreindre) telle que

$$\Psi(S, \varphi(S)) = {}^t \varphi(S) S \varphi(S) = S_0$$

□

Revenons à l'expression de f , et utilisons le lemme avec $S_0 = Q(0)$:

$$f(x) = {}^t x {}^t \varphi(Q(x))^{-1} Q(0) \varphi(Q(x))^{-1} x$$

Il reste à voir que l'application $x \mapsto \theta(x) = \varphi(Q(x))^{-1}x$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme d'un voisinage de 0. On applique cette fois le théorème d'inversion locale :

$$\theta(0+h) = \varphi(Q(h))^{-1}h = \varphi(Q(0) + o(1))^{-1}h = (I_n + o(1))^{-1}h = h + o(\|h\|)$$

Donc $d\theta(0) = I_n$ est inversible et par inversion locale (θ est $\mathcal{C}^1$), θ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Ensuite, dans ces coordonnées on a bien :

$$f \circ \theta^{-1}(x) = {}^t x Q(0) x$$

□

Leçons concernées : Taylor, inversion locale, applications différentiables, matrices symétriques réelles, formes quadratiques réelles