

2 Image de l'exponentielle

ref : exercice sur la page web de Denis Serre.

THÉORÈME 2.1

$\exp : \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ est surjective, non injective.

$\exp(\mathcal{M}(n, \mathbb{R}))$ est l'ensemble des carrés de matrices réelles.

PREUVE.

Non injectivité :

$\exp(2i\pi I_n) = \exp(0) = I_n$, donc $\exp$ n'est pas injective.

Surjectivité sur $\mathbb{C}$:

idée : On veut faire une preuve par calcul différentiel en utilisant la connexité de $GL(n, \mathbb{C})$. Il est immédiat que $\exp$ est ouverte en 0 par inversion locale étant donné que $d\exp_0 = \text{id}$. On ne peut pas conclure de même aux autres points directement par propriété de groupes car $\exp$ n'est pas un morphisme de groupes. On peut faire marcher cette idée quand même car $\exp$ est un morphisme en restriction à de gros sous-espaces : les algèbres de polynômes en des matrices.

Soit $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$, l'algèbre des polynômes en A notée $\mathbb{C}[A]$ est en particulier un groupe additif. L'exponentielle est un morphisme de $\mathbb{C}[A]$ dans $\mathbb{C}[A]^* = GL(n, \mathbb{C}) \cap \mathbb{C}[A]$. En effet, $\exp(M)$ est un polynôme en M car c'est une limite de polynômes en M lequel sous-espace vectoriel est fermé car $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ est dimension finie.

$GL(n, \mathbb{C})$ étant ouvert, son intersection avec $\mathbb{C}[A]$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$. C'est aussi un connexe par la même preuve que pour la connexité de $GL(n, \mathbb{C})$. Si M, N sont deux matrices le chemin $tM + (1-t)N$ rencontre peut-être des matrices non inversibles pour $t \in [0, 1]$ mais si on passe par des t complexes, il n'y a plus de problème car on doit simplement éviter un nombre fini de valeurs vu que $\det(xM + (1-x)N)$ est un polynôme en x qui n'a donc qu'un nombre fini de racines.

L'application $\exp : \mathbb{C}[A] \rightarrow \mathbb{C}[A]^*$ est un morphisme de groupes et sa différentielle en 0 est l'identité, donc par inversion local elle est ouverte en 0. Par propriété de groupes, elle est alors ouverte en tous les points ; la translation dans $\mathbb{C}[A]$ et la multiplication dans $\mathbb{C}[A]^*$ étant des difféomorphismes. Toujours par propriété de groupes, l'image est fermée car ouverte (partition en les classes à gauche modulo le sous-groupe). Par connexité, c'est tout $\mathbb{C}[A]^*$, et cela montre donc que tout $B \in GL(n, \mathbb{C})$ s'écrit $B = \exp(P(B))$ pour un $P \in \mathbb{C}[X]$.

Cas réel :

Pour le résultat réel, on remarque que $\exp(M/2)^2 = \exp(M)$ pour une inclusion. L'autre inclusion est conséquence du cas complexe en utilisant la conjugaison : pour $B \in GL(n, \mathbb{R})$,

$$B^2 = B\bar{B} = \exp(P(B)) \exp(\bar{P}(\bar{B})) = \exp(P(B) + \bar{P}(B))$$

car $P(B)$ et $\bar{P}(B)$ commutent. □

Leçons concernées : exponentielle de matrices, polynômes d'endomorphismes, connexité, inversion locale, groupe linéaire.