37 Théorème de Pascal

ref : Eiden

THÉORÈME 37.1 *Soit $\mathcal{C}$ une conique non dégénérée du plan projectif et six points distincts A, B, C, A', B' et C' sur $\mathcal{C}$. On construit $R = (AB') \cap (A'B)$, $Q = (CA') \cap (C'A)$ et $P = (B'C) \cap (BC')$. Alors les points P, Q et R sont alignés.*

PREUVE. Les coniques projectives non dégénérées sont équivalentes, en effet, elles sont données par les zéros d'une forme quadratique non dégénérée à 3 variables, dont le seul invariant affine est la signature. La seule signature intéressante est $(2, 1)$ car la signature $(3, 0)$ donne une conique vide et les autres signatures s'obtiennent à partir de celles-ci en multipliant la forme quadratique par -1, ce qui ne change pas la conique. On peut donc trouver une homographie (du plan projectif réel, donc un élément de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$) qui envoie la conique $\mathcal{C}$ sur un cercle que l'on peut supposer être le cercle unité $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$. Les homographies préservent les notions d'incidence, donc il suffit de démontrer le théorème de Pascal sur le cercle unité $\mathbb{U}$.

On va maintenant utiliser les nombres complexes via la structure de droite projective complexe et le groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$.

Un certain type d'homographie se prête bien au problème, ce sont les involutions de Frégier :

PROPOSITION 37.2 *On définit une involution de Frégier de centre $a \in P^2(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{U}$ comme l'application de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{U}$ qui envoie un point m sur l'autre intersection m' de la droite (am) avec $\mathbb{U}$. Si cette droite est tangente, on pose $m' = m$. Alors ces transformations sont la restriction à $\mathbb{U}$ d'éléments d'ordre 2 de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$.*

PREUVE. Si $a \in \mathbb{C}$ (pas à l'infini), on cherche le point m' sous la forme $m' = a + \lambda(m - a)$ (c'est-à-dire sur la droite (am)), solution de de $z\overline{z} = 1$ (c'est-à-dire sur $\mathbb{U}$). On trouve l'équation vérifiée par λ :

$$\lambda((m - a)\overline{a} + (\overline{m} - \overline{a})a) + \lambda^2|m - a|^2 = 1 - |a|^2$$

On sait que $\lambda = 1$ est solution car $m \in \mathbb{U}$, il est donc facile de trouver la deuxième racine :

$$\lambda = \frac{|a|^2 - 1}{|m - a|^2}, \quad \text{puis,} \quad m' = \frac{a - m}{1 - \overline{a}m}$$

C'est bien la forme d'une homographie de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. On obtient le cas où a est à l'infini, en passant à la limite : si $a = Re^{i\theta}$ avec $R \to \infty$, on trouve $m' = -\frac{e^{2i\theta}}{m}$ à la limite, qui est encore bien une homographie. On remarque que des valeurs de θ qui diffèrent d'un multiple de π donnent la même transformation après envoi du point à l'infini ce qui est cohérent.

Voici les expressions matricielles (relevées à $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$) de ces homographies :

$$\begin{pmatrix} -1 & a \\ -\overline{a} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -e^{2i\theta} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul montre que leurs carrés sont des homothéties, donc ces homographies sont d'ordre 2. Remarque : Quitte à multiplier par un scalaire non nul, on peut trouver un représentant dan $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ qui soit d'ordre 2, on a que deux choix : il faut choisir une racine carrée de $1 - \overline{a}a$. $\square$

Voici pourquoi les involutions de Frégier se prêtent bien au problème. Tout d'abord, elles sont liés à l'alignement via le fait évident : pour Y, Z sur le cercle, $I_X(Y) = Z \Leftrightarrow X, Y, Z$ alignés.

Notons $P_0 \in P^2(\mathbb{R})$ l'intersection de (QR) et $(B'C)$, il suffit de montrer que $P_0 \in (BC')$, c'est-à-dire $P_0 = P$.

La transformation $J = I_{P_0} \circ I_Q \circ I_R$ vérifie, par construction, $J(B) = B'$. Si on arrive à montrer qu'elle est involutive, on aura aussi $J(B') = B$, mais $J(B') = I_{P_0}(C')$. Donc B, C' et P_0 sont alignés.

Il reste à montrer que J est involutive, pour cela on va utiliser un peu de connaissance du groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$.

Lemme 37.3 – *Un élément de* $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ *est d'ordre* 2 *si et seulement si il est de trace nulle.*
– *Si X, Y, Z sont alignés dans $P^2(\mathbb{R})$, l'homographie $J = I_X \circ I_Y \circ I_Z$ est d'ordre 2.*

Preuve. Le premier point est un calcul. Attention, la trace n'est définie qu'à un facteur multiplicatif non nul près, mais "trace nulle" a un sens.

Pour le deuxième point, calculons la trace du produit. Il y a trois cas à distinguer selon que les points sont à l'infini ou non.

Si tous les points sont alignés sur la droite à l'infini, les matrices des homographies sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -e^{2i\theta_j} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Elles permutent donc les droites $< e_1 >$ et $< e_2 >$ en somme directe dans $\mathbb{C}^2$. Si on en compose trois comme ça, on trouve donc une matrice de trace nulle car permute encore les deux droites. (ou sinon on peut faire le calcul).

Si les trois points sont dans le plan affine, les matrices des involutions sont :

$$U = \begin{pmatrix} -1 & a \\ -\overline{a} & 1 \end{pmatrix} . V = \begin{pmatrix} -1 & b \\ -\overline{b} & 1 \end{pmatrix} . W = \begin{pmatrix} -1 & \mu a + (1-\mu) b \\ -\mu\overline{a} - (1-\mu)\overline{b} & 1 \end{pmatrix}$$

pour un $\mu \in \mathbb{R}$. On écrit alors

$$\mathrm{tr}(WVU) = (1-\mu)\,\mathrm{tr}(V^2U) + \mu\,\mathrm{tr}(UVU) = (1-\mu)(1-\overline{b}b)\,\mathrm{tr}(U) + \mu(1-\overline{a}a)\,\mathrm{tr}(V) = 0 + 0 = 0$$

car $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. La même formule permet de se restreindre à cet ordre du produit WVU.

Il reste le cas où un des point est à l'infini (si deux y sont le troisième aussi), il s'obtient par passage à la limite du cas précédent. □ □

Leçons concernées : nbre complexe en géométrie, groupes en géométrie, coniques.