

An
10

Convergence de la méthode de la puissance

Refs: [Filbet] Analyse numérique

Algo: $x^{(0)} = x_0$ $k=0$

tant que "critères d'arrêt":

$$z^{(k+1)} = Ax^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = \frac{z^{(k+1)}}{c_{k+1}} \quad \text{cui } c_{k+1} = \|z^{(k+1)}\|_\infty$$

Thm: Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ d'z ds $\|A\|$ et λ_1 la plus grande vp en module de multiplicité $p \geq 1$. Supp qu'il n'y ait pas de vp $\lambda \in \text{Sp}(A)$ tq $\lambda \neq \lambda_1$ et $|\lambda| = |\lambda_1|$.

Si $x_0 \in \mathbb{K}^n$ est tq $x_0 \notin \text{Ker}(A - \lambda_1 I_n)^T$ Alors la suite $(x^{(k)})_k$ converge par l'algorithme cv vers un $\vec{v}_p$ $x \in \mathbb{K}^n$ associé à la vp λ_1 : $Ax = \lambda_1 x$.

pv: Comme la matrice A est d'z ds $\|A\|$, $\exists$ base normée de vp $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$.

On note λ_i la vp associée à v_i ie $Av_i = \lambda_i v_i$. On ordonne les vps:

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p \text{ et } |\lambda_1| = \dots = |\lambda_p| > |\lambda_{p+1}| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

étape ①: écriture de $x^{(k)}$

Dans la base $(v_i)_i$, x_0 s'écrit

$$x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad \text{cui } (\alpha_i)_i \in \mathbb{K}^n.$$

$$\text{et donc } Ax_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i$$

On applique une 1^{ère} fois l'algo.

$$z^{(1)} = Ax_0. \text{ On note } j_1 \in \{1, \dots, n\} \text{ tq}$$

$$|z_{j_1}^{(1)}| = \|z^{(1)}\|_\infty,$$

$$\text{Alors } x^{(1)} = \frac{Ax_0}{c_1} \quad \text{cui } c_1 = z_{j_1}^{(1)} \neq 0$$

$$= \frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i. \text{ À la } k^{\text{e}} \text{ étape on}$$

$$\text{obtient } z^{(k)} = Ax^{(k-1)} = \frac{1}{c_1 \dots c_{k-1}} A^k x_0$$

$$= \frac{1}{c_1 \dots c_{k-1}} \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \alpha_i v_i$$

en notant j_k le plus petit indice vérifiant $|z_{j_k}^{(k)}| = \|z^{(k)}\|_\infty$, on a

$$x^{(k)} = \frac{1}{c_1 \dots c_k} \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \alpha_i v_i \quad c_k = z_{j_k}^{(k)} \neq 0$$

$$= \frac{\lambda_1^k}{c_1 \dots c_k} \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k v_i$$

étape ② Mg $z^{(k)} \rightarrow x \vec{v}_p$ associée à λ_1 .

$$\text{On pose } z = \sum_{i=1}^p \alpha_i v_i$$

$$\text{Donc } x^{(k)} = \frac{\lambda_1^k}{c_1 \dots c_k} z + \frac{\lambda_1^k}{c_1 \dots c_k} \sum_{i=p+1}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k v_i$$

$$\text{L'IT: } 1 = \|x^{(k)}\|_\infty$$

$$\geq \left| \frac{\lambda_1^k}{c_1 \dots c_k} \right| \cdot \left[\|z\|_\infty - \sum_{i=1}^p \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \|v_i\|_\infty \right]$$

Puisque $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ $\forall i \geq p$, on a donc

$$\left| \frac{\lambda_1^k}{c_1 \dots c_k} \right| \|z\|_\infty \leq C \quad \text{cui } C > 0 \text{ indep de } k$$

$$\text{donc } \left(\frac{\lambda_1^k}{c_1 \dots c_k} z \right)_k \text{ est bornée.}$$

D'autre part en passant à $\|\cdot\|_\infty$ puis à la limite ds $(*)$,

$$1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)}\|_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_1^k}{c_1 \dots c_k} \right| \|z + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k v_i\|_\infty$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_1^k}{c_1 \dots c_k} \right| \|z\|_\infty.$$

Notons $j \in \{1, \dots, n\}$ le plus petit indice
 tq $\|z_j\| = \|z\|_\infty$ et posons $x = \frac{z}{z_j}$
 tq $\|x\|_\infty = 1 = x_j$

Puisque $(x^{(k)})_k$ bornée ds ℓ^∞ , $\exists$
 ss-suite cv. On écrit $\otimes$ pour j :

Pour une ss-suite cv toujours notée
 $(x^{(k)})_k$:

$$\textcircled{1} \quad x_j = \lim_{k \rightarrow \infty} x_j^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1_1^k}{c_1 \dots c_k} z_j$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1_1^k}{c_1 \dots c_k} = \frac{1}{z_j}$$

Puisque toutes les ^{sr} suites extraites
 convergentes ont m^{me} limite, $x^{(k)} \rightarrow x$
 étape $\textcircled{2}$ vérification finale:

Puisque $(v_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont des v_p s associée
 à la v_p 1_1 , on vérifie facilement

$$\begin{aligned} \text{que } Ax &= A \frac{z}{z_j} = \frac{A}{z_j} \sum_{i=1}^p \alpha_i v_i \\ &= 1_1 \frac{\sum_{i=1}^p \alpha_i v_i}{z_j} = 1_1 \frac{z}{z_j} = 1_1 x. \end{aligned}$$

De plus, $x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ car

$x_0 \notin \text{Ker}(A - 1_1 I_n)^\perp$ donc

$\exists j_0 \in [1, p]$ tq $\alpha_{j_0} \neq 0$.

en vérité on peut avoir
 ± 1 mais ça ne change
 pas la ccl.