33 Topologie des classes de similitude

Ref : FGN, algèbre 1.

THÉORÈME 33.1 *Soit $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$.*
- *A est nilpotente si et seulement si la classe de similitude de A adhère à 0.*
- *A est diagonalisable si et seulement si la classe de similitude est fermée.*

PREUVE.
Tout repose sur le lemme suivant :

LEMME 33.2 *Dans la classe de similitude de A, on peut trouver des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients strictement au-dessus de la diagonale sont arbitrairement petits.*

PREUVE. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, on peut commencer par trigonaliser : $T = P^{-1}AP$. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à T et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Modifions la base $\mathcal{B}$ par le procédé suivant : $\mathcal{B}' = (e'_1 = \epsilon e_1, e'_2\epsilon^2 e_2, \ldots, e'_n\epsilon^n e_n)$. Dans cette base, on a :

$$f(e'_j) = f(\epsilon^j e_j) = \epsilon^j f(e_j) = \epsilon^j \sum_i t_{i,j} e_i = \sum_i t_{i,j} \epsilon^{j-i} e'_i$$

Pour $j > i$, les coefficients surdiagonaux $t_{i,j}\epsilon^{j-i}$ sont arbitrairement petit quand ϵ est petit.
□

Cas nilpotent

Si A est nilpotente, le lemme nous fournit des matrices semblables à A avec des coefficients surdiagonaux petits et les termes diagonaux sont les valeurs propres, c'est-à-dire 0 puisque A est nilpotente. On trouver donc dans la classe de similitude de A des matrices aussi proche de 0 que l'on veut.

Réciproquement, par continuité du polynôme caractéristique par rapport à la matrice : si A_p tend vers B avec A_p semblable à A.

$$\chi_A = X^n = \chi_B$$

Donc B est nilpotente par Cayley-Hamilton.

Cas diagonalisable

Si A est diagonalisable, son polynôme minimal π_A est scindé à racines simples. Si A_p tend vers B avec A_p semblable à A, on a $\pi_A(A_p) = 0$ pour tout p, et en passant à la limite : $\pi_A(B) = 0$, donc B est diagonalisable. De plus, A et B ont même polynôme caractéristique par continuité du polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \chi_{A_p} \xrightarrow[p \to \infty]{} \chi_B$$

Donc A et B sont diagonalisables et ont même polynôme caractéristique donc sont semblables.

Réciproquement, si la classe de similitude est fermée, on trouve des matrices diagonales dans la classe de similitude par le lemme. □

Leçons concernées : endo diag, endo nilpotents, polynômes d'endomorphismes.