leçons :
224 : développements asymptotiques
124 : Anneau des séries formelles
126 : Exemples d'équations diophantiennes.
140 : corps des fractions rationnelles

Equation diophantienne et série génératrice

(40)

Référence
Gourdon Analyse

Thm : Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des entiers naturels non nuls premiers entre eux dans leur ensemble et $n \in \mathbb{N}$. On note S_n le nombre de solutions $(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p = n$.

Alors $$S_n \sim \frac{1}{\prod_{i=1}^{p} \alpha_i} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$$

preuve : (1) On pose $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n X^n$ la série (formelle) génératrice associée à (S_n).

Notons A_n l'ensemble des solutions de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p = n$.

$$f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n X^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |A_n| X^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{(n_1,\dots,n_p)\in A_n} 1 \right) X^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{(n_1,\dots,n_p)\in A_n} X^n \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{(n_1,\dots,n_p)\in A_n} X^{\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{(n_1,\dots,n_p)\in A_n} (X^{\alpha_1})^{n_1} \cdots (X^{\alpha_p})^{n_p}$$

$$= \sum_{(n_1,\dots,n_p)\in \mathbb{N}^p} (X^{\alpha_1})^{n_1} \cdots (X^{\alpha_p})^{n_p} = \prod_{i=1}^{p} \sum_{n_i \geq 0} (X^{\alpha_i})^{n_i} = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1 - X^{\alpha_i}}$$

Penser au fait que l'on a partitionner $\mathbb{N}^p$ par les valeurs de $\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p$.

$f(X)$ est donc une fraction rationnelle dont les pôles sont les racines α_1-ième, …, α_p-ième de l'unité. On note Π l'ensemble des pôles de f.

(2) Soit $\omega \in \Pi$.
Supposons que $\omega^{\alpha_i} = 1 \quad \forall i \in [\![1, p]\!]$. Alors, par Bezout, $\omega = 1$.
1 est donc le seul pôle de f de multiplicité p.

D'où $$f(X) = \frac{\alpha}{(1-X)^p} + R(X) \quad \text{où} \quad R(X) = \sum_{\omega \in \Pi} \left(\frac{a_{1,\omega}}{\omega - X} + \dots + \frac{a_{p,\omega}}{(\omega - X)^{p-1}} \right)$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $a_{i,\omega} \in \mathbb{C}$ (décomposition en éléments simples)

(3) Calculons α :

On pose $g(X) = (1-X)^p f(X)$. Alors $\alpha = g(1)$.

Or $$g(X) = \prod_{i=1}^{p} \frac{1-X}{1-X^{\alpha_i}} = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1 + X + X^2 + \dots + X^{\alpha_i - 1}}$$ donc $$\boxed{g(1) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{p} \alpha_i} = \alpha}$$

④ Evaluons $\dfrac{1}{(\omega-X)^k}$, $\omega \neq 0$:

$$\frac{1}{\omega-X} = \frac{1}{\omega}\frac{1}{1-\frac{X}{\omega}} = \frac{1}{\omega}\sum_{n\geq 0}\frac{X^n}{\omega^n}$$

On dérive $(k-1)$-fois : $$\frac{(k-1)!}{(\omega-X)^k} = \frac{1}{\omega}\sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)\dots(n-(k-1)+1)X^{n-(k-1)}}{\omega^n}$$

ie $$\frac{1}{(\omega-X)^k} = \frac{1}{(k-1)!}\frac{1}{\omega}\sum_{n\geq 0}\frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots(n+1)}{\omega^{n+k-1}}X^n$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\sum_{n\geq 0}\frac{(n+k-1)!}{n!\,\omega^{n+k}}X^n$$

Si $|\omega| = 1$, $\dfrac{(n+k-1)!}{n!\,\omega^{n-k}} = O(n^{k-1})$ $\qquad \dfrac{(n+k-1)!}{n!} = (n+k-1)\dots(n+1)$ $= P(n)$ où $\deg P = k-1$

Donc $R(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ avec $a_n = O(n^{p-2})$

On en déduit que $S_n = \alpha \dfrac{1}{(p-1)!}\dfrac{(n+p-1)!}{n!} + O(n^{p-2})$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^{p}\alpha_i}\frac{n^{p-1}}{(p-1)!} + O(n^{p-2})}$$ et $S_n \sim \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{p}\alpha_i}\dfrac{n^{p-1}}{(p-1)!}$

⑤ Détails de Stirling

$$\frac{(n+k-1)!}{n!} \sim \underbrace{\sqrt{\frac{2\pi(n+k-1)}{2\pi n}}}_{\to 1}\underbrace{\frac{(n+k-1)^n}{n^n}}_{=\left(1+\frac{k-1}{n}\right)^n \to e^{k-1}}\underbrace{(n+k-1)^{k-1}}_{\sim n^{k-1}}\underbrace{\frac{e^n}{e^{n+k-1}}}_{=(e^{k-1})^{-1}} = O(n^{k-1})$$

INUTILE