1.11 Facile & classique : marche aléatoire sur le N-gone régulier

(haut) Référence : ? Recasage : 149, 155, 261, 262.

Énoncé : Soit N un entier impair supérieur ou égal à 3. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ telle que $X_0 = 0$ ps et :

$$\forall k \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}, \mathbb{P}\left(X_{n+1} = k \pm 1 \mid X_n = k\right) = \frac{1}{2}$$

Alors, quand $n \to \infty$, $X_n \longrightarrow \mathcal{U}(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ en loi.

Preuve : Soit, pour $n \geq 0$, p_n défini par :

$$p_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}\left(X_n = 0\right) \\ \mathbb{P}\left(X_n = 1\right) \\ \vdots \\ \mathbb{P}\left(X_n = N-1\right) \end{pmatrix}$$

Alors la formule des probas totales montre que $p_{n+1} = Ap_n$, où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \dots & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \dots & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, A est la matrice avec des $1/2$ sur la sur et sous-diagonale, avec un en haut-droite et en bas-gauche. On peut écrire

$$A = \frac{1}{2}(J + J^{-1})$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & (0) \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 & \\ (0) & & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

J est la (transposée de) la matrice compagnon de $X^n - 1$, donc son polynôme minimal est $X^N - 1$: ainsi, elle a N valeurs propres distinctes, les ω^k (avec $\omega = e^{2i\pi/N}$), pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$, et est donc diagonalisable. On peut donc écrire :

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^k Q_{\omega_k}$$

avec q_{ω_k} la matrice du projecteur spectral. On en déduit :

$$A = \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2k\pi/N) Q_{\omega_k}$$

Et donc :

$$A^n = \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2k\pi/N)^n Q_{\omega_k}$$

Or, comme N est impair, tous les $\cos$ sauf le premier ont une valeur absolue < 1, donc ils tendent tous vers 0 ; ainsi, on a :

$$A^n \longrightarrow Q_1$$

Dès lors, on en déduit :

$$p_n \longrightarrow Q_1(p_0)$$

Comme A est symétrique réelle, ses projecteurs spectraux sont des projecteurs orthogonaux [3] ; comme $\mathrm{Im}(Q_1)$ est la droite engendrée par $\pi =^t (1, 1 \ldots, 1)$, on en déduit :

$$Q_1(p_0) = \frac{\langle p_0, \pi \rangle}{\langle \pi, \pi \rangle}\pi = \frac{1}{N}\pi$$

Et donc on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}\left(X_n = 0\right) \\ \mathbb{P}\left(X_n = 1\right) \\ \vdots \\ \mathbb{P}\left(X_n = N-1\right) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1/N \\ 1/N \\ \vdots \\ 1/N \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve bien, l'espace d'états étant discret, la convergence en loi de X_n.

3. Voir le développement sur la suite de polygones pour une méthode d'algèbre linéaire et non bilinéaire.