Ellipse de Steiner / Dérivée d'un polynôme

(Fresnel - Matignon)

Théorème : On identifie le plan affine euclidien à $\mathbb{C}$. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}$ non alignés. Alors il existe une unique ellipse tangente aux côtés du triangle en leurs milieux. De plus, les foyers de cette ellipse sont les racines du polynôme dérivé de $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$.

Idée : Pour un triangle équilatéral, on sait faire (il suffit de prendre le cercle tangent au milieu des côtés). On se ramène ensuite au cas général via une bijection affine.

Démonstration : 1) Soit f la bijection affine telle que $f(1) = a$, $f(j) = b$ et $f(j^2) = c$. On a alors
$$\begin{cases} f(z) = uz + v\bar{z} + w \\ f(0) = f\left(\frac{1}{3} + \frac{j}{3} + \frac{j^2}{3}\right) = \frac{1}{3}(a+b+c) = w \\ u\bar{u} - v\bar{v} \neq 0. \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$. C'est le cercle tangent au côtés du triangle $(1,j,j^2)$ en leurs milieux. Soit $(\mathcal{E}) = f(\mathcal{C})$.

$(\mathcal{E})$ est bien l'ellipse recherchée. En effet :

- $(\mathcal{E})$ est une ellipse (conique bornée non dégénérée car elle passe par 3 points alignés)
- $(\mathcal{E})$ est tangente aux côtés du triangle...
- ... en leurs milieux (préservation du barycentre).
- $(\mathcal{E})$ est unique (cf. thm à mettre dans le plan : $(\mathcal{E})$ passe par le milieu de 3 côtés et est tangent à 2 des côtés donc est unique)*.

2) $\mathcal{E} = \left\{ \frac{ue^{i\theta} + ve^{-i\theta}}{2} \, ; \, \theta \in [0;2\pi] \right\} + w$. Posant $u = |u|e^{i\varphi_1}$ $v = |v|e^{i\varphi_2}$, il vient
$$\mathcal{E} = \left\{ \frac{|u|}{2} e^{it} + \frac{|v|}{2} e^{-it} \right\}_{t \in [0;2\pi]} e^{i\frac{(\varphi_1+\varphi_2)}{2}} + w$$

Posons $\mathcal{F} = \left\{ \frac{|u|}{2} e^{it} + \frac{|v|}{2} e^{-it} ; t \in [0;2\pi] \right\} = \left\{ (|u|+|v|)\cos t + \frac{i}{2}(|u|-|v|)\sin t \right\}_{t \in [0;2\pi]}$

Ainsi $\mathcal{F}$ est d'équation cartésienne $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$ dans le repère $(O;1;i)$ où $\alpha = \frac{1}{2}(|u|+|v|)$ et $\beta = \frac{1}{2}(|u|-|v|)$.

Donc $\alpha^2 - \beta^2 = |u|^2 - |v|^2 \neq 0$. Donc $\sqrt{|u||v|}$ et $-\sqrt{|u||v|}$ sont les foyers de l'ellipse $\mathcal{F}$. Donc $w \pm e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}} \sqrt{|u||v|}$ sont les foyers de $(\mathcal{E})$.

3) D'autre part, on a $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$

$$= X^3 - \cancel{2}(a+b+c)X^2 + (ab+bc+ca)X - abc$$

Ainsi, $P'(X) = 3X^2 - 6w + (ab+bc+ca)$

Or, $a = u+v+w$ $\quad b = uj+vj^2+w$ et $c = uj^2+vj+w$.

Donc $ab+bc+ca = 3w^2 + 3uv(j+j^2)$ (on utilise $1+j+j^2=0$).

$$= 3w^2 - 3uv$$

Il s'ensuit que $P'(X) = 3(X^2 - 2wX + w^2 - uv)$, que les racines de P' sont donc $w \pm \dfrac{\sqrt{4w^2-4(w^2-uv)}}{2} = w \pm \sqrt{uv}$

Les racines de P' sont donc $w \pm e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\sqrt{|u||v|}$, les foyers de (E).