
Prolongement Holomorphe de la fonction Γ sur $\mathbb{C}/\{-\mathbb{N}\}$

Référence : Objectif Agrégation p.82

Recasage : 207 / 239 / 245 / 265 / 235

Théorème 1

On définit la fonction Γ sur le plan $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ par :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Cette fonction est bien définie sur $\mathcal{P}$ et on admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ et un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}/\{-\mathbb{N}\}$.

Preuve.

On va faire cette preuve en 3 étapes mais d'abord montrons que Γ est bien définie sur le plan $\mathcal{P}$. Montrons d'abord l'intégrabilité en 0.

$$\forall z \in \mathcal{P} \quad |t^{z-1} e^{-t}| \leq |t^{z-1}| = t^{\operatorname{Re}(z)-1}$$

Or comme $z \in \mathcal{P}$ on a $\operatorname{Re}(z) > 0$ ce qui nous donne $\operatorname{Re}(z)-1 > -1$ et par comparaison à une intégrale de Riemann la fonction est bien intégrable en 0. Pour ce qui est de l'intégrabilité en l'infini on sait que $t^{z-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et toujours par comparaison avec une intégrale de Riemann on a que Γ est bien intégrable en l'infini. Ce qui nous assure la bonne définition de Γ sur $\mathcal{P}$.

Etape 1 : Montrons la formule suivante :

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Pour on découpe l'intégrale en deux :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

On se concentre sur la première intégrale en utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle donc :

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+z-1}}{n!} \right) dt$$

On vérifie les hypothèses du théorème de Fubini pour pouvoir intervertir série et intégrale :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n t^{n+z-1}}{n!} \right| dt = \int_0^1 t^{\operatorname{Re}(z)-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} dt = \int_0^1 t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^t dt \leq e \int_0^1 t^{\operatorname{Re}(z)-1} dt$$

Or on a déjà vu que cette dernière intégrale était convergente car $z \in \mathcal{P}$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini.

Ainsi :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+z-1}}{n!} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{n+z-1}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

Ce qui démontre bien la formule annoncée.

Etape 2 : Montrons que la série de fonction $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est une fonction méromorphe possédant un seul pôle simple en $-n$. Pour se faire on va utiliser le théorèmes sur les séries de fonction méromorphe qui nous dit :

Théorème. Soit f_n une suite de fonctions méromorphes tel que pour tout compact K il existe N_K tel que $\forall n \geq N_K$ f_n n'a pas de pôle et $\sum_{n \geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K . Alors la série de terme générale f_n est une fonction méromorphe.

On a donc deux hypothèses à montrer :

- $f_n : z \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est une fonction méromorphe dont les seuls pôles simples sont les entiers naturels négatif.
- Soit K un compact de $\mathbb{C}$ alors il existe un entier N_K tel que $K \subset \overline{D(0, N_K)}$ alors la fonction f_n n'a pas de pôle dans K (pour $n \geq N_K$). Montrons que la série de fonction converge normalement dans K (qui implique la convergence uniforme) On a :

$$\forall z \in K \quad |z+n| \geq n-|z| \geq n-N_K \implies |f_n(z)| \leq \frac{1}{n!(n-N_K)}$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n!(n-N_K)}$ est convergente (par critère de d'Alembert par exemple). Ainsi la série de fonction $\sum_{n \geq N_K} f_n$ converge normalement donc uniformément sur K . En conclusion la série de fonctions est bien une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont tous les pôles simples sont les entiers négatifs. De plus on a une expression des résidus en ces pôles qui sont $\text{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$

Etape 3 : Montrons que $z \mapsto \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, pour cela on utilise le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale.

- $t \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ est continue sur $[1; +\infty[$ donc mesurable.
- $z \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
- Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact de $\mathbb{C}$ alors $z \mapsto \text{Re}(z)$ est continue sur le compact K alors elle y est bornée et atteint ses bornes c'est à dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ telle que $\text{Re}(z) \geq a$ et donc :

$$\forall z \in K \quad \forall t \in [1; +\infty[\quad |t^{z-1} e^{-t}| = t^{\text{Re}(z)-1} e^{-t} \leq t^{a-1} e^{-t} \in L^1([1; +\infty[))$$

Donc $\int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Donc $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est un prolongement holomorphe de Γ sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$.

De plus en vertu du principe du prolongement analytique, comme $\mathbb{C}/\{\mathbb{N}\}$ est connexe (car connexe par arc) on démontre l'unicité d'un tel prolongement sur ce connexe.

■