

---

## Prolongement de $\zeta$ à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

---

**Recasage** : 207 / 235 / 265 / 245

**Référence** : Zuily Queffelec "Analyse pour l'agrégation"

On utilise ici les résultats du développement sur la formule sommatoire de Poisson et la son application à la fonction  $\theta$  de Jacobi. (voir les leçons concernés)

### **Théorème 1** (Prolongement de $\zeta$ )

La fonction  $\zeta$  définit sur  $\Omega = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1\}$  par  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$  admet un prolongement holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ .

**Preuve.**

► Etape 1 : Une autre écriture de  $\zeta$

On pose  $\forall t > 0 \quad \tilde{\theta}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}$ . On remarque alors que  $\theta(t) = 1 + 2\tilde{\theta}(t)$  et d'après le lemme précédent on obtient :

$$\forall t > 0 \quad \tilde{\theta}(t) = \frac{\theta(t) - 1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \left( 1 + 2\tilde{\theta}\left(\frac{1}{t}\right) \right) - \frac{1}{2}$$

On définit la fonction  $\Gamma$  d'Euler par  $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$  cette fonction est bien définie sur  $\Omega$  (et même un peu plus car pour  $\operatorname{Re}(s) > 0$  cette formule est valable) . On part alors de l'expression de  $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ &= \pi^{\frac{s}{2}} n^s \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1} dy \quad (\text{On a posé le changement de variable } y = \frac{x}{\pi n^2}) \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1} dy \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1} dy \quad (\star)$$

► Etape 2 : Interversion série-intégrale

On souhaite intervertir série et intégrale dans la formule (\*) pour cela il suffit de montrer que la séries des intégrales en valeur absolue converge c'est à dire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} |e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1}| dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{\operatorname{Re}(s)}{2}-1} dy < \infty$$

Mais d'après la formule (\*) on a  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{\operatorname{Re}(s)}{2}-1} dy = \frac{\Gamma\left(\frac{\operatorname{Re}(s)}{2}\right)}{\pi^{\frac{\operatorname{Re}(s)}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(s)}}$  et comme  $\operatorname{Re}(s) > 1$  la série est convergente et de ce fait on peut appliquer le théorème de Fubini, qui nous permet d'intervertir série et intégrale de ce fait :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1} dy = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}-1} dy = \int_0^{\infty} \tilde{\theta}(y) y^{\frac{s}{2}-1} dy$$

Et donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{\infty} \tilde{\theta}(y) y^{\frac{s}{2}-1} dy$$

► Etape 3 : Calcul de l'intégrale

On considère alors  $I = \int_0^{\infty} \tilde{\theta}(y) y^{\frac{s}{2}-1} dy = \int_0^1 \tilde{\theta}(y) y^{\frac{s}{2}-1} dy + \int_1^{\infty} \tilde{\theta}(y) y^{\frac{s}{2}-1} dy = I_1 + I_2$ . On va utiliser la relation fonctionnelle de  $\tilde{\theta}$  dans  $I_1$ .

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \tilde{\theta}(y) y^{\frac{s}{2}-1} dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2\sqrt{y}} \left( 1 + 2\tilde{\theta}\left(\frac{1}{y}\right) \right) - \frac{1}{2} \right) y^{\frac{s}{2}-1} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} dy + \int_0^1 y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \tilde{\theta}\left(\frac{1}{y}\right) dy - \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{s}{2}-1} dy \\ &= \frac{1}{s-1} + \int_0^1 y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \tilde{\theta}\left(\frac{1}{y}\right) dy - \frac{1}{s} \end{aligned}$$

On procède au changement de variable  $u = \frac{1}{y}$  dans l'intégrale et on obtient :

$$\int_0^1 y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \tilde{\theta}\left(\frac{1}{y}\right) dy = \int_{+\infty}^1 \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \tilde{\theta}(u) \frac{-1}{u^2} du = \int_1^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \tilde{\theta}(u) du$$

Finalement on obtient :

$$I = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{+\infty} y^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \tilde{\theta}(y) dy + \int_1^{\infty} \tilde{\theta}(y) y^{\frac{s}{2}-1} dy = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \left( y^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} + y^{\frac{s}{2}-1} \right) \tilde{\theta}(y) dy$$

On regroupe alors tout dans une seule formule pour  $\zeta$  :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} + \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^{\infty} \left(y^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} + y^{\frac{s}{2}-1}\right) \tilde{\theta}(y) dy \quad (\star \star)$$

On sait à présent que la fonction  $\Gamma$  vérifie la relation fonctionnelle  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$  on peut donc voir que  $\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) = \frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$  et donc en remplaçant dans la formule on obtient alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^{\infty} \left(y^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} + y^{\frac{s}{2}-1}\right) \tilde{\theta}(y) dy$$

► Etape 4 : Prolongement de  $\zeta$  à  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

On sait que ( la fonction  $\Gamma$  admet un prolongement holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$  )  $\frac{1}{\Gamma}$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  tout entier. On en déduit alors que les fonctions :

$$s \mapsto \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \quad \text{et} \quad s \mapsto \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

admettent un prolongement holomorphe sur  $\mathbb{C}$  car  $\pi^{\frac{s}{2}} = e^{\frac{s}{2}\ln(\pi)}$  On écrit à présent :

$$\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + (s-1)\psi(s)$$

avec  $\psi$  une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et de plus  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  et donc :

$$\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{2(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} = \frac{1}{s-1} + \psi(s)$$

Il reste à voir que l'intégrale définit une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . Utilisons pour cela le théorème d'holomorphicité sous le signe intégrale.

- $\forall s \in \mathbb{C} \quad y \mapsto \left(y^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} + y^{\frac{s}{2}-1}\right) \tilde{\theta}(y)$  est continue sur  $[1; +\infty[$
- $y \mapsto \left(y^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} + y^{\frac{s}{2}-1}\right) \tilde{\theta}(y)$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$  (somme d'exponentielle qui est holomorphe).
- Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C}$  tel que  $\text{Re}(s) \in [a; b]$  ( $s \mapsto \text{Re}(s)$  est continue sur  $K$  donc bornée et atteint ses bornes) pour tout  $y \geq 1$

$$\left| y^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} + y^{\frac{s}{2}-1} \right| \leq y^{-\frac{1}{2}-\frac{\text{Re}(s)}{2}} + y^{\frac{\text{Re}(s)}{2}-1} \leq y^{-\frac{1}{2}-\frac{a}{2}} + y^{\frac{b}{2}-1}$$

De plus pour  $y \geq 1$  :

$$\tilde{\theta}(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n y} = \frac{e^{-\pi y}}{1 - e^{-\pi y}}$$

Et donc  $\forall y \geq 1 \quad \left| y^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} + y^{\frac{s}{2}-1} \right| \tilde{\theta}(y) \leq \left( y^{-\frac{1}{2}-\frac{a}{2}} + y^{\frac{b}{2}-1} \right) \frac{e^{-\pi y}}{1 - e^{-\pi y}} \in L^1([1; +\infty[)$ . La fonction est donc bien holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . Finalement :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \psi(s) + \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_1^{\infty} \left(y^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} + y^{\frac{s}{2}-1}\right) \tilde{\theta}(y) dy$$

qui est bien une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ . De plus  $\text{Res}(\zeta, 1) = 1$ . ■

### Remarque.

On peut en déduire une très jolie relation fonctionnelle pour la fonction zêta en effet posons la fonction  $\xi$  définie par :

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

Cette fonction vérifie alors  $\xi(1-s) = \xi(s)$  en effet par la relation  $(\star \star)$  on obtient :

$$\xi(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \left(y^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} + y^{\frac{s}{2}-1}\right) \tilde{\theta}(y) dy$$

Et on a donc :

$$\begin{aligned} \xi(1-s) &= \frac{1}{(1-s)-1} - \frac{1}{1-s} + \int_1^\infty \left(y^{-\frac{1}{2}-\frac{1-s}{2}} + y^{\frac{1-s}{2}-1}\right) \tilde{\theta}(y) dy \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty \left(y^{\frac{s}{2}-1} + y^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\right) \tilde{\theta}(y) dy \\ &= \xi(s) \end{aligned}$$

Cette équation fonctionnelle nous donne alors la relation suivante :

$$\zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \zeta(1-s)$$

- On peut en déduire les zéros triviaux de la fonction zêta de Riemann. En effet  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{\Gamma(-k)} = 0$  On en déduit alors de la formule précédente que  $\zeta(-2k) = 0$ .
- Toujours d'après la formule précédente on peut donc calculer  $\zeta$  en  $-1$  :

$$\zeta(-1) = \frac{\pi^{-\frac{3}{2}} \Gamma(1)}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \zeta(2) = \frac{\pi^{-\frac{3}{2}} \pi^2}{6\Gamma(-\frac{1}{2})}$$

Or par la relation fonctionnelle liée à  $\Gamma$  on a  $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$ . Ce qui donne donc  $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ . On peut donc alors dire que :

$$”1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}”$$