Formule sommatoire de Poisson et applications

Recasage : 246 / 250

Référence : Oraux X-ENS page 306 / Zuily p 28

Ce qu'il faut savoir :

- Le théorème de Dirichlet
- L'espace des fonctions de Schwartz (noté $\mathscr{S}(\mathbb{R})$) les fonctions à décroissance rapide c'est à dire les fonctions de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tel que $\forall k, n \geq 0 \; x^k f^{(n)}(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$
- Les coefficient de Fourier pour une fonction f 2π périodique $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx$

On définit également la transformée de Fourier d'une fonction f dans l'espace de Schwartz par :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\, dx$$

Théorème 1 (Formule Sommatoire de Poisson)

Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(n)e^{inx}$$

Preuve.

► Etape 1 : Convergence normale de la somme

Comme $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ alors il existe $M > 0$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq \frac{M}{1+x^2}$$

Soit $K \subset \mathbb{R}$ compact tel que $K = [-a; a]$ avec $a > 0$ alors $\forall x \in K$ et $|n| > \dfrac{a}{2\pi}$:

$$|f(x+2n\pi)| \leq \frac{M}{1+(x+2\pi n)^2} \leq \frac{M}{1+(2\pi|n|-a)^2}$$

Ainsi la série converge normalement sur tout compact, on pose alors $\Phi(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)$ on peut donc conclure que Φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par convergence normale sur tout compact des séries dérivées (la même majoration fonctionne) et du fait que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$

► Etape 2 : Montrons que Φ est 2π-périodique

On passe par les sommes partielles en écrivant :

$$\sum_{k=-n}^{n} f(x+2\pi+2\pi k) = \sum_{k=-n}^{n} f(x+2\pi(k+1))$$

On pose alors le changement d'indice $j = n+1$ dans la somme ce qui donne :

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} f\big(x+2\pi(k+1)\big) &= \sum_{j=-n+1}^{n+1} f(x+2\pi j)\\ &= \sum_{j=-n}^{n} f(x+2\pi j) + f\big(x+2\pi(n+1)\big) + f\big(x+2\pi(-n+1)\big)\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini il vient que $\Phi(x+2\pi) = \Phi(x)$ donc Φ est 2π-périodique.

► <u>Etape 3</u> : Conclusion

Calculons les coefficients de Fourier de la fonction Φ qui est 2π-périodique d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}c_n(\Phi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)e^{-inx}\ dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2n\pi)\right)e^{-inx}\ dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+2n\pi)e^{-inx}\ dx \quad \text{(Par convergence normale de la série sur } [-\pi;\pi])\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{\pi(2n-1)}^{\pi(2n+1)} f(u)e^{-inu}\underbrace{e^{2i\pi n^2}}_{=1}\ du \quad \text{(On pose } u = x+2n\pi)\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{\pi(2n-1)}^{\pi(2n+1)} f(u)e^{-inu}\ du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-inu}\ du \quad \text{(Car } f\in L^1(\mathbb{R}))\\ &= \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(n)\end{aligned}$$

De plus le fait que Φ soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ le théorème de Dirichlet nous donne alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2n\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(\Phi)e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(n)e^{inx}$$

■

Application 1 (Fonction de Jacobi)

On pose pour $t>0$ $\quad \theta(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}$ alors $\forall t>0\ \theta(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\dfrac{1}{t}\right)$

Preuve.

On pose $f : x \longmapsto e^{-at^2}$. Cette fonction est bien un élément de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ et on sait que :

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

D'après la formule de Poisson pour $x = 0$ on obtient alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-a4\pi^2 n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{4a}}$$

Posons alors $a = \dfrac{t}{4\pi}$ ce qui donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \pi}{t}}$$

Ce qui donne bien $\theta(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\dfrac{1}{t}\right)$

■

Remarque.

La fonction de Jacobi n'est pas une application anodine, c'est une fonction très importante qui permet d'étendre la fonction ζ de Riemann à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. (Voir le développement sur le prolongement de ζ).