Transformée de Fourier de la gaussienne complexe

Référence :
Recasage : 236 / 239 / 245 / 250

On étudie ici la transformée de Fourier de la Gaussienne complexe noté F et définie par :

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi}\ e^{-z\frac{t^2}{2}}\ dt$$

Pour $\xi \in \mathbb{R}$ et $z \in \Omega = \Big\{z \in \mathbb{C}\ :\ \mathrm{Re}(z) > 0\Big\}$.

Théorème 1

F est holomorphe sur Ω et de plus $F(z) = \sqrt{\dfrac{2\pi}{z}} e^{-\frac{\xi^2}{2z}}$.

Preuve.

► Commençons par montrer que F est bien définie sur Ω en effet :

$$\forall z \in \Omega \quad |e^{-it\xi}\ e^{-z\frac{t^2}{2}}| = e^{-\mathrm{Re}(z)\frac{t^2}{2}}$$

qui est bien une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ car $\mathrm{Re}(z) > 0$ et la fonction $t \longmapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est paire et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en l'infini par croissance comparée. Ainsi F est bien définie sur Ω.

► Montrons à présent que F est holomorphe sur Ω, pour cela utilisons le théorème d'holomorphie des intégrales à paramètres :

— $t \longmapsto e^{-it\xi}\ e^{-z\frac{t^2}{2}}$ est continue (donc mesurable) sur $\mathbb{R}$

— $z \longmapsto e^{-it\xi}\ e^{-z\frac{t^2}{2}}$ est holomorphe sur Ω (car l'exponentielle complexe est holomorphe sur $\mathbb{C}$)

— Soit $K \subset \Omega$ un compacte alors il existe $a > 0$ tel que $\mathrm{Re}(z) \geq a$ alors $|e^{-it\xi}\ e^{-z\frac{t^2}{2}}| = e^{-\mathrm{Re}(z)\frac{t^2}{2}} \leq e^{-a\frac{t^2}{2}}$ qui est bien une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ (même raison qu'au dessus).

On peut donc conclure que F est holomorphe sur Ω.

► Montrons enfin l'égalité annoncé, en vertu du théorème de prolongement analytique on peut se contenter de montrer la formule sur un sous ensemble connexe de Ω par exemple $\mathbb{R}_+^*$ montrons alors que $\forall x > 0\ F(x) = \sqrt{\dfrac{2\pi}{x}} e^{-\frac{\xi^2}{2x}}$. L'idée est donc de se ramener aux calculs de la transformée de Fourier d'une gaussienne réelle.

Soit $x > 0$ alors :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi}\ e^{-x\frac{t^2}{2}}\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi}\ e^{\frac{(\sqrt{x}t)^2}{2}}\ dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\left(\frac{\xi}{\sqrt{x}}\right)}\ e^{-\frac{u^2}{2}}\ du \quad \text{Par changement de variable } u = \sqrt{x}t \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{-\frac{\xi}{2x}} \quad \text{D'après la transformée de Fourier de la gaussienne réelle appliqué au point } \frac{\xi}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

D'après le principe du prolongement analystique on peut affirmer que $F(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-\frac{\xi^2}{2z}}$

■

Comme applications, on peut retrouver deux méthodes de calculs approchées d'intégrales comme la méthode de Laplace et de la phase stationnaire. Mais avant de voir le lien démontrons un lemme utile pour le suite.

Lemme 1

Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\mu+i\lambda)\frac{t^2}{2}}\ f(t)\ dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\mu+i\lambda)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2(\mu+i\lambda)}} \widehat{f}(\xi)\ d\xi$$

Preuve.

On va distinguer alors deux cas suivant le signe de μ :

$\underline{\mu > 0}$: On veut appliquer le théorème de Plancherel pour cela vérifions que les fonctions sont bien de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. $t \longmapsto e^{-(\mu+i\lambda)\frac{t^2}{2}}$ est bien de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ car $\mu > 0$. Comme f est continue et à support compact elle est bien de carré intégrable donc :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\mu+i\lambda)\frac{t^2}{2}}\ f(t)\ dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \overline{e^{-(\mu-i\lambda)\frac{t^2}{2}}}\ dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\ \overline{\widehat{e^{-(\mu-i\lambda)\frac{t^2}{2}}}}\ d\xi \quad \text{(Par Plancherel)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\ \overline{\sqrt{\frac{2\pi}{\mu-i\lambda}} e^{-\frac{\xi^2}{2(\mu-i\lambda)}}}\ d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\mu+i\lambda)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\ e^{-\frac{\xi^2}{2(\mu+i\lambda)}} d\xi
\end{aligned}$$

$\underline{\mu = 0}$: Soit $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ alors en vertu du résultat précédent et du théorème de convergence dominé on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\mu_n+i\lambda)\frac{t^2}{2}}\ f(t)\ dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi i\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\ e^{-\frac{\xi^2}{2i\lambda}} d\xi$

■

Application 1

Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support compact alors $\forall N \geq$ on a pour $\lambda \longrightarrow +\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda \frac{t^2}{2}} f(t)\ dt = \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda^{-(k+\frac{1}{2})}}{2^k k!} f^{(2k)}(0) + \mathscr{O}(\lambda^{-N-\frac{3}{2}})$$

et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda \frac{t^2}{2}} f(t)\ dt = \sqrt{2\pi}\ e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-i)^k \lambda^{-(k+\frac{1}{2})}}{2^k k!} f^{(2k)}(0) + \mathscr{O}(\lambda^{-N-\frac{3}{2}})$$

Preuve.

On note $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda \frac{t^2}{2}} f(t)\ dt$ et $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda \frac{t^2}{2}} f(t)\ dt$ Or d'après le lemme précédant on obtient :

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2\lambda}}\ \widehat{f}(\xi)\ d\xi \qquad J = \frac{1}{\sqrt{2i\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2i\lambda}}\ \widehat{f}(\xi)\ d\xi$$

La formule de Taylor avec reste intégrale appliqué à $t \longmapsto e^t$ sur l'intervalle $[0, x]$ donne :

$$e^x = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{N!} \int_0^x (x-t)^N e^t\ dt$$

En posant le changement de variable $s = \dfrac{t}{x}$ dans l'intégrale on obtient alors :

$$e^x = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1-s)^N e^{xs}\ ds$$

► Commençons par la première égalité, en appliquant le formule de Taylor avec reste intégrale ci dessus au point $-\frac{\xi^2}{2\lambda}$ on obtient :

$$e^{-\frac{\xi^2}{2\lambda}} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{k!(2\lambda)^k} + \underbrace{\frac{(-1)^{N+1}}{N!} \left(\frac{\xi^2}{2\lambda}\right)^{N+1} \int_0^1 (1-s)^N e^{-s\frac{\xi^2}{2\lambda}}\ ds}_{=R_N(\lambda,\xi)}$$

En injectant dans I on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{k!(2\lambda)^k} + R_N(\lambda,\xi) \right) \widehat{f}(\xi)\ d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left[\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!(2\lambda)^k} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^{2k} \widehat{f}(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} R_N(\lambda,\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi \right] \quad (\star) \end{aligned}$$

On va maintenant étudier séparément les deux intégrales commençons par majorer le reste :

$$|R_N(\lambda,\xi)| = \frac{1}{N!} \frac{\xi^{2(n+1)}}{(2\lambda)^{N+1}} \left| \int_0^1 (1-s)^N e^{-s\frac{\xi^2}{2\lambda}}\ ds \right| \leq \frac{1}{N!} \frac{\xi^{2(n+1)}}{(2\lambda)^{N+1}} \int_0^1 (1-s)^N\ ds = \frac{1}{(N+1)!} \frac{\xi^{2(N+1)}}{(2\lambda)^{N+1}}$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} R_N(\lambda,\xi)\widehat{f}(\xi)\ d\xi\right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |R_N(\lambda,\xi)\widehat{f}(\xi)|\ d\xi \\
&\leq \frac{1}{(N+1)!}\frac{1}{(2\lambda)^{N+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^{2(N+1)}|\widehat{f}(\xi)|\ d\xi \\
&\leq \frac{C_{N,f}}{\lambda^{N+1}} \quad \text{(La transformée de Fourier est bornée)}
\end{aligned}
$$

Finalement on peut donc conclure que cette expression est un $\mathscr{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right)$. Concentrons nous à présent sur la première intégrale, par la formule d'inversion de Fourier on sait que $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\ d\xi$, de plus comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact, le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale s'applique ainsi $f^{(2k)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(i\xi)^{2k}e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\ d\xi$ et en évaluant en 0 on obtient finalement $f^{(2k)}(0)=\frac{(-1)^k}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^{2k}\widehat{f}(\xi)\ d\xi$. En regroupant ces deux informations dans $(\star)$:

$$
\boxed{I=\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\left[\sum_{k=0}^{N}\frac{2\pi}{k!(2\lambda)^k}f^{(2k)}(0)+\mathscr{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right)\right]=\sqrt{2\pi}\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda^{-(k+\frac{1}{2})}}{k!\ 2^k}f^{(2k)}(0)+\mathscr{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right)}
$$

► On passe à présent à J (méthode de la phase stationnaire) on remplace x par $-\frac{\xi^2}{2i\lambda}=i\frac{\xi^2}{2\lambda}$ et on obtient : Ce qui nous donne :

$$
e^{i\frac{\xi^2}{2\lambda}}=\sum_{k=0}^{N}\frac{i^k\xi^{2k}}{k!(2\lambda)^k}+\underbrace{\frac{i^{N+1}}{N!}\left(\frac{\xi^2}{2\lambda}\right)^{N+1}\int_0^1(1-s)^N e^{is\frac{\xi^2}{2\lambda}}\ ds}_{=R_N(\lambda,\xi)}
$$

Et pour les même raisons $R_N(\lambda,\varepsilon)=\mathscr{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right)$ et donc en injectant dans J on obtient :

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{\sqrt{2i\pi\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{i^k\xi^{2k}}{k!(2\lambda)^k}+R_n(\lambda,\xi)\right)\widehat{f}(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2i\pi\lambda}}\left[\sum_{k=0}^{N}\frac{i^k}{k!(2\lambda)^k}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^{2k}\widehat{f}(\xi)\ d\xi+\mathscr{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right)\right] \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}\sqrt{i}\sqrt{\lambda}}\left[\sum_{k=0}^{N}\frac{(-i)^k}{k!(2\lambda)^k}f^{(2k)}(0)+\mathscr{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right)\right] \\
&= \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{i}}\sum_{k=0}^{N}\frac{(-i)^k\lambda^{-k-\frac{1}{2}}}{k!2^k}f^{(2k)}(0)+\mathscr{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+\frac{3}{2}}}\right) \\
&= \boxed{\sqrt{2\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}\sum_{k=0}^{N}\frac{(-i)^k\lambda^{-k-\frac{1}{2}}}{k!2^k}f^{(2k)}(0)+\mathscr{O}\left(\frac{1}{\lambda^{N+\frac{3}{2}}}\right)}
\end{aligned}
$$

Annexe : Questions possibles autour du développement

Lemme 2 (TF de la gaussienne réelle)

$$\forall a > 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} e^{-it\xi} \, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

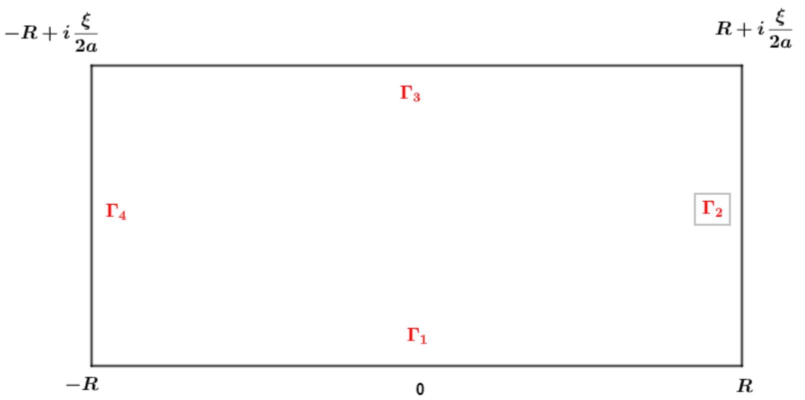
Preuve.

<u>**Méthode 1**</u> : En passant par une fonction holomorphe.

On commence par intuiter un peu pourquoi passé dans le complexe est pertinent, on va commencer par réunir les exponentielles et complété le carré c'est à dire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} e^{-it\xi} \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+it\xi)} \, dt = e^{\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}t + \frac{i\xi}{2\sqrt{a}}\right)^2} \, dt$$

Ce qu'il y a dans le carré est censé (ca se voit non ?) nous faire pensé à l'intégrale curviligne de $z \longmapsto e^{-az^2}$ comme cette fonction est holomorphe en l'intégrant sur un lacet d'après le théorème de Cauchy on obtient 0. Trouvons alors le lacet adéquat :



On notant $\Gamma = \Gamma_1 \vee \Gamma_2 \vee \Gamma_3 \vee \Gamma_4$ on obtient que $\displaystyle\int_\Gamma e^{-az^2} \, dz = 0$. Regardons a présent l'intégrale sur chaque composante.

— $\displaystyle\int_{\Gamma_1} f(z) \, dz = \int_{-R}^{R} e^{-ax^2} \, dx \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \, dx$

— $\displaystyle\int_{\Gamma_2} f(z) \, dz = \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R+ix)^2} i \, dx \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

— $\displaystyle -\int_{\Gamma_3} f(z) \, dz = -\int_{-R}^{R} e^{-a\left(x+i\frac{\xi}{2a}\right)^2} \, dx = -\int_{-R}^{R} e^{-\left(\sqrt{a}t + i\frac{\xi}{2\sqrt{a}}\right)^2} \, dt \xrightarrow[R\to\infty]{} -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}t + i\frac{\xi}{2\sqrt{a}}\right)^2} \, dt$

— $\displaystyle\int_{\Gamma_4} f(z) \, dz = \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(-R+ix)^2} i \, dx \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

On remarque donc qu'on a bien "retrouvé" l'intégrale du début à un facteur près ! (il y a un - car on ne parcours pas dans le bon sens donc on normalise en changeant les bornes de l'intégrale). En passant donc à la limite on obtient donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}t + i\frac{\xi}{2\sqrt{a}}\right)^2} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Et donc en normalisant on obtient finalement : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}e^{-it\xi}\ dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4}}$

Pour détailler on donne les paramétrisations utilisé ! (Pas toujours facile de retrouver quel est la bonne paramétrisation)

$$\Gamma_1 : \begin{array}{l} [-R;R] \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto x \end{array} \quad \Gamma_2 : \begin{array}{l} [0;\frac{\xi}{2a}] \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto R+ix \end{array} \quad \Gamma_3 : \begin{array}{l} [-R;R] \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto x+i\frac{\xi}{2a} \end{array} \quad \Gamma_2 : \begin{array}{l} [0;\frac{\xi}{2a}] \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto -R+ix \end{array}$$

Méthode 2 : En passant par une équation différentielle

Posons la fonction G définie par :

$$G(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}e^{-it\xi}\ dx$$

Montrons que G est de classe $\mathscr{C}^1$ grâce aux théorèmes de dérivations sous le signe intégrale.

— $\forall \xi \in \mathbb{R},\ t \longmapsto e^{-at^2}e^{-it\xi}$ est mesurable (car continue)

— $\forall t \in \mathbb{R},\ \xi \longmapsto e^{-at^2}e^{-it\xi}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

— $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}\ |-ite^{-at^2}e^{-it\xi}| \leq |x|e^{-at^2}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$

Le théorème s'applique et donc $\forall \xi \in \mathbb{R} \quad G'(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-at^2}e^{-it\xi}\ dt$ on peut procéder à une intégration par partie ce qui donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-at^2}e^{-it\xi}\ dt = \left[-\frac{i}{2a}e^{-at^2}e^{-it\xi}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{\xi}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}e^{-it\xi}\ dt = -\frac{\xi}{2a}G(\xi)$$

Ainsi $\forall \xi \in \mathbb{R}\ G(\xi) = Ce^{-\frac{\xi^2}{4a}}$ et en évaluant en 0 on obtient que $C = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\ dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

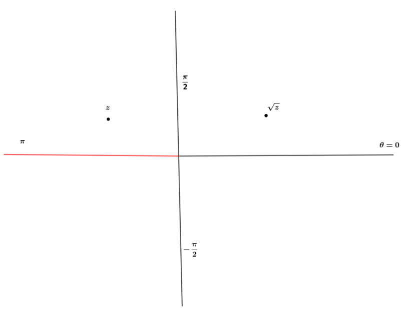
$$G(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

■

► Une autre question possible est sur la définition de $\sqrt{z}$ dans la formule de la Gaussienne complexe. Comment définir proprement une telle fonction ?

On commence par donner la détermination principale du logarithme :

$$\log(z) = \ln(|z|) + i\mathrm{Arg}(z) \quad \mathrm{Arg}(z) \in]-\pi;\pi[$$



Cette définition du logarithme complexe est celle sur le plus grand domaine possible, on définit alors classiquement la fonction racine par :

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= z^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}\left(\ln(|z|)+i\mathrm{Arg}(z)\right)} \\ &= \sqrt{|z|}\ e^{\frac{i}{2}\mathrm{Arg}(z)} \end{aligned}$$

On vient alors de démontrer la méthode Laplace et la phase stationnaire dans le cas de la fonction $x \longmapsto \frac{x^2}{2}$ mais on peut démontrer le cas général grâce à ce cas particulier. Voici alors la généralisation.

Théorème 2 (Laplace)

Soit $I =]a; b[$ un intervalle bornée ou non. Soit ϕ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et f une fonction continue sur I. Supposons que :

— $\displaystyle\int_a^b e^{t\varphi(x)}|f(x)|\ dx < \infty$

— φ' s'annule en un seul point x_0 de I et $\phi''(x_0) < 0$

— $f(x_0) \neq 0$

Alors :

$$F(t) = \int_a^b e^{t\phi(x)} f(x)\ dx \underset{\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{t|\phi''(x_0)|}} e^{t\phi(x_0)} f(x_0)$$

Remarque.

Le résultat trouvé plus haut est enfaite un développement asymptotique alors que la nous avons un équivalent, mais il suffit alors de regarder le premier terme du développement asymptotique. Une belle application de ce théorème est d'obtenir la formule de Stirling.

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\ dx \underset{y=\frac{x}{t}}{=} \int_0^{+\infty} e^{t(\ln(y)-y)}\ dy$$

Et donc en prenant $\phi(y) = \ln(y) - y$ vérifie les conditions car $\phi'(y) = 0 \Longleftrightarrow y = 1$ et $\phi''(1) = -1$ et $f = 1$ de ce fait on obtient alors :

$$\Gamma(t+1) \underset{\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} t^{t+\frac{1}{2}} e^{-t} \Longrightarrow n! \underset{\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

► On peut passer aux cas générale pour une fonction Φ qui vérifie $\Phi(0) = 0$ $\Phi'(0) = 0$ $\Phi''(0) > 0$ on regarde le cas ou 0 est un point critique non dégénérée. Par la formule de Taylor avec reste intégrale on peut écrire alors que :

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \Phi'(0)x + \int_0^1 (1-s)\Phi(xs)\ ds = \int_0^1 (1-s)\Phi(xs)\ ds$$

On peut donc par hypothèse dire que $\psi(x) = \sqrt{\Phi(x)^2}$ et poser le changement de variable $u = \psi(x)$ dans l'intégrale. On pourra ainsi utiliser le développement asymptotique trouver dans le cas particulier précédent. **Ceci illustre le lemme de Morse en dimension 1 !**