
Expression des $\zeta(2k)$

Référence : FGN Oaux X-ENS : Analyse 2

Recasage : 230 / 241 / 243 / 246 / 265

On cherche à établir cette formule

$$\forall k \geq 1 \quad \zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}$$

où les $(b_n)_{n \geq 0}$ sont les nombres de Bernoulli qui seront définis après.

Lemme 1

Soit f la fonction définie par $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$, f admet un développement en série sur $D(0, 2\pi)$

$$\forall |z| < 2\pi : f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2k}} \right) z^{2k}$$

Preuve.

► On remarque dans un premier temps que la fonction f est continue en 0 en effet $e^z - 1 \underset{0}{\sim} z$ et donc en posant $f(0) = 1$ on obtient un prolongement par continuité.

L'idée est de déterminer le développement en série entière de f grâce au développement en série de Fourier d'une fonction bien choisie. Pour $x \in]-\pi; \pi[$ on pose $\varphi(x) = e^{\frac{zx}{2\pi}}$ où $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{zx}{2\pi}} e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\frac{z}{2\pi} - in} \left[e^{x(\frac{z}{2\pi} - in)} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^n (e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}})}{z - 2i\pi n} \end{aligned}$$

Comme φ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ on peut appliquer le théorème de Dirichlet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} (\varphi(x^-) + \varphi(x^+)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\varphi) e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n (e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}})}{z - 2i\pi n} e^{inx}$$

On souhaite retrouver $f(z)$ pour cela on va évaluer la relation précédente en $x = \pi$ ce qui nous donne :

$$\frac{1}{2} (e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n (e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}})}{z - 2i\pi n} e^{i\pi n} = (e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z - 2i\pi n}$$

En multipliant par le conjugué dans la somme on obtient : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z - 2i\pi n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{z + 2i\pi n}{z^2 + 4\pi^2 n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{z}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$.

En effet $\sum_{k=-N}^N \frac{2i\pi n}{z^2 + 4\pi^2 n^2} = 0$ (symétrie dans la somme)

D'où :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{z}{z^2 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$$

Ainsi pour $z \notin 2i\pi\mathbb{Z}$: $\frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{\frac{\bar{z}}{2}}}{2(e^{\frac{z}{2}} - e^{\frac{\bar{z}}{2}})} = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$. On va donc faire apparaître $f(z)$ dans le membre de gauche c'est à dire :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z} \quad \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{\frac{\bar{z}}{2}}}{2(e^{\frac{z}{2}} - e^{\frac{\bar{z}}{2}})} = \frac{e^z + 1}{2(e^z - 1)} = \frac{e^z - 1 + 2}{2(e^z - 1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^z - 1}$$

En multipliant par z et en soustrayant $\frac{z}{2}$ on obtient $f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$ (*). Il reste à développer en série entière (*) Alors pour $|z| < 2\pi$ et $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2} &= \frac{z^2}{4\pi^2 n^2} \times \frac{1}{1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}} = \frac{z^2}{4\pi^2 n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{4\pi^2 n^2} \right)^k (-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2(k+1)}}{(2\pi n)^{2(k+1)}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}} \quad \text{On pose } u_{n,k} = (-1)^{k-1} \frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}} \end{aligned}$$

On veut maintenant utiliser le théorème de Fubini Lebesgue pour intervertir l'ordre de sommation dans (*).

Pour cela on doit montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |u_{n,k}| \right) < \infty$. On a :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |u_{n,k}| = \frac{|z|^2}{4\pi^2 n^2} \times \frac{1}{1 - \frac{|z|^2}{4\pi^2 n^2}} = \frac{|z|^2}{4\pi^2 n^2 - |z|^2}$$

Or la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{|z|^2}{4\pi^2 n^2 - |z|^2}$ est convergente donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |u_{n,k}| \right) < \infty$ On peut donc appliquer le théorème de Fubini Lebesgue. Donc :

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} (-1)^{k-1} \frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}} \right) \\ &= 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^{k-1} \frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}} \right) \\ &= \boxed{1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{k \in \mathbb{N}^*} (-1)^{k-1} \frac{1}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2k}} \right) z^{2k}} \end{aligned}$$

■

Théorème 1

Soit ζ la fonction zêta de Riemann définie sur les entiers. Alors on a :

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}$$

où $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les nombres de Bernoulli.

Preuve.

On définit les nombres de Bernoulli comme l'unique suite telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \forall |z| < 2\pi$. d'après ce qui précède on a que $b_0 = 1$ $b_1 = -\frac{1}{2}$ et $b_{2n+1} = 0$ (car les termes devant z^{2k+1} dans le développement en série entière de f valent 0 et il y a unicité du développement en série entière de f).

On cherche donc une relation de récurrence sur les (b_n) pour cela on va utiliser un produit de Cauchy en effet : $z = f(z)(e^z - 1)$ et comme on connaît leurs développements en série entière on peut donc effectuer leur produit de Cauchy par convergence absolue des deux séries sur leur disque de convergence.

$$\begin{aligned} z = f(z)(e^z - 1) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} z^k \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!(n-k)!} \right) \end{aligned}$$

Or pour $n \geq 2$ on a $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!(n-k)!} = 0$ donc en multipliant par $n!$ on obtient que $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$ Ainsi :

$$b_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} b_k$$

On peut donc calculer les premiers nombres de Bernoulli : $b_0 = 1$ $b_1 = -\frac{1}{2}$ $b_2 = \frac{1}{6}$ $b_4 = -\frac{1}{30}$ $b_6 = \frac{1}{42}$. De plus par unicité du développement en série entière on obtient :

$$\frac{b_{2k}}{(2k)!} = (-1)^{k-1} \frac{2}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

Ce qui nous donne finalement :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}$$

■

On retrouve alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

Remarque.

A noter que l'on ne connaît peu de choses sur la fonction ζ aux entiers impairs. En 1978 Apéry a démontré que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ était un nombre irrationnel. Et Rivoal (français) a démontré en 2000 qu'il y avait une infinité de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}}$ qui étaient irrationnels.

► Cette jolie formule a de belles applications on peut notamment démontrer un bel équivalent de b_{2k} c'est l'objet de la proposition suivante.

Théorème 2

$$b_{2k} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} 4\sqrt{k\pi} \left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k}$$

Preuve.

La fonction zêta de Riemann définit pour $x > 1$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ converge normalement sur $[2; \infty[$ et donc on peut écrire :

$$\zeta(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$$

Le passage à la limite est justifié par la convergence uniforme. De ce fait on a :

$$|b_{2k}| = \zeta(2k) \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{(2\pi)^{2k}} \sqrt{4\pi k} \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k} = 4\sqrt{\pi k} \left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k}$$

■

On peut ainsi redémontrer grâce au théorème de d'Alembert (pour les séries et non pas pour les séries entières) que le rayon de convergence de la série génératrice est effectivement 2π .

Regardons maintenant comment Euler avait réussi à démontrer que le fait que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. on considère la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ dont on connaît un développement en série entière :

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Ensuite Euler fait la parié assez fou que l'on peut factoriser la fonction sinus est comme les polynômes et peut se factoriser en fonctions de ses zéros de ce fait :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdots \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \end{aligned}$$

En développant ce produit et en considérant uniquement les terme devant x^2 on obtient :

$$x^2 \left(-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} \cdots \right)$$

Et en identifiant avec le développement en série de Taylor on obtient que :

$$-\frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{3!} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pour l'époque cette preuve n'était pas rigoureuse car cette dernière faisait intervenir des produits infinis.