leçons :	Méthodes itératives de résolution d'un système linéaire (18)	Références :
162 : Systèmes d'équat° linéaires 226 : Suites vectorielles et réelles $u_{n+1} = f(u_n)$ 232 : Méthodes d'approximation des solut° de $f(x)=0$. 157 : Endom$^{\text{ts}}$ trigonalisables et nilpotents		Dumas "Modélisation à l'oral de l'Agrégation" Calcul Scientifique p. 167

Rappel : On écrit $A = M - N$ où $A \in Gl_n(\mathbb{R})$, $(M,N) \in Gl_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$u_0 \in \mathbb{R}^n$, $Mu_{k+1} = Nu_k + b$

On dit que cette méthode est convergente si pour toute valeur $u_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite (u_k) converge (la limite est alors nécessairement u solution de $Au = b$)

Thm : La méthode itérative associée à la décomposition (M,N) de A converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$ (ρ est le rayon spectral)

preuve : Dans le lemme, remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ partout.

① lemme : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une norme subordonnée $|||\cdot|||$ telle que $|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon$

preuve : On trigonalise A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $\exists T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure, $\exists U \in Gl_n(\mathbb{C})$ $T = U^{-1}AU$. $T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & t_{nn} \end{pmatrix}$

Soit $\delta > 0$. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique et posons $e_1' = e_1, e_2' = \delta e_2, \dots, e_n' = \delta^{n-1} e_n$

Dans la nouvelle base, pour $j \in [\![1,n]\!]$: $Te_j' = \delta^{j-1} Te_j = \delta^{j-1} \sum_{i=1}^{j} t_{i,j} e_i$

$$= \delta^{j-1} \sum_{i=1}^{j} t_{i,j} \frac{e_i'}{\delta^{i-1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{j} \delta^{j-i} t_{i,j} e_i'$$

On note $D_\delta = \operatorname{diag}(1, \delta, \dots, \delta^{n-1})$ la matrice de changement de base

et $T_\delta = D_\delta^{-1} T D_\delta = (UD_\delta)^{-1} A (UD_\delta)$

Alors $T_\delta = \begin{pmatrix} t_{11} & \delta t_{12} & \cdots & \delta^{n-1} t_{1n} \\ & t_{22} & & \\ & & \ddots & \delta t_{n-1\,n} \\ (0) & & & t_{nn} \end{pmatrix}$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on définit la norme $\|\cdot\|$ par $\|x\| = \|(UD_\delta)^{-1} x\|_\infty$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée associée.

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$|||B||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(UD_\delta)^{-1} Bx\|_\infty}{\|(UD_\delta)^{-1} x\|_\infty} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|(UD_\delta)^{-1} B\, UD_\delta y\|_\infty}{\|y\|_\infty}$$

Donc $|||B||| = |||(UD_\delta)^{-1} B UD_\delta|||_\infty$

Or si $P = (p_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad |||P|||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |p_{ij}| \right)$

On prend donc $\delta > 0$ tel que $\forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad \sum\limits_{j=i+1}^{n} \delta^{j-i} |t_{ij}| \leq \varepsilon$

et on a $|||A||| = |||T_\delta|||_\infty \leq \rho(A) + \varepsilon$

② Fin de la preuve :

Notons $e_k = u_k - u$, pour $k \in \mathbb{N}$, le vecteur erreur.

Alors $e_{k+1} = u_{k+1} - u = (M^{-1}Nu_k + M^{-1}b) - (M^{-1}Nu + M^{-1}b) = M^{-1}N e_k$

Par récurrence : $e_k = (M^{-1}N)^k e_0$ où $e_0 = u_0 - u$

- Si $\rho(M^{-1}N) < 1$:

Par le lemme, $\exists\ |||.|||$ telle que $|||M^{-1}N||| < 1$

Donc $\|e_k\| \leq |||M^{-1}N|||^k \|e_0\| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

- Si $\rho(M^{-1}N) \geq 1$:

Soit λ une valeur propre complexe de $M^{-1}N$ telle que $|\lambda| \geq 1$ et $\tilde{u} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé :

$(M^{-1}N)\tilde{u} = \lambda \tilde{u}$

$(M^{-1}N)^k \tilde{u} = \lambda^k \tilde{u}$ ne converge pas vers 0.

On décompose $\tilde{u} = \tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2$ où $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in \mathbb{R}^n$

La méthode itérative ne converge pas pour $u_0 = u + \tilde{u}_1$ ou $u_0 = u + \tilde{u}_2$