Théorème de Weierstrass (par la convolution)

Recasage : 201, 203, 209, 228

Référence : Gourdon, Analyse p. 304-305.

Théorème (Weierstrass) : soit J un segment de $\mathbb{R}$ et $f : J \to \mathbb{C}$ continue alors f est limite uniforme sur J d'une suite de fonctions polynomiales.

Rappel : une suite de fonctions mesurables $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si :

- $\forall n\in\mathbb{N}$, $\chi_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \chi_n = 1$
- $\forall \delta>0$, $\int_{|t|>\delta} \chi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

① Soient $f\in C_c^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité.

Soit $\varepsilon>0$, comme f est continue et nulle en dehors d'un compact, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$: $\exists \eta>0$ tq $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $|x-y|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad |f*\chi_n(x)-f(x)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-t)-f(x))\chi_n(t)\,dt\right|$$
$$\leq \int_{|t|>\eta} |f(x-t)-f(x)|\chi_n(t)\,dt + \int_{-\eta}^{\eta} |f(x-t)-f(x)|\chi_n(t)\,dt$$
$$\leq 2\|f\|_\infty \int_{|t|>\eta}\chi_n(t)\,dt + \varepsilon \underbrace{\int_{-\eta}^{\eta}\chi_n(t)\,dt}_{\leq \int_{\mathbb{R}}\chi_n(t)\,dt = 1 \text{ car } \chi_n\geq 0}$$

Donc $\forall\varepsilon>0$, $\|f*\chi_n - f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \underbrace{\int_{|t|>\eta}\chi_n(t)\,dt}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \varepsilon$

donc $\limsup_{n\to\infty} \|f*\chi_n - f\|_\infty = 0$ d'où $\lim_{n\to\infty}\|f*\chi_n-f\|_\infty = 0$

i.e $f*\chi_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} f$ sur $\mathbb{R}$.

② On pose pour $n\in\mathbb{N}$, $a_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt$ et $p_n : t\longmapsto \begin{cases} \frac{(1-t^2)^n}{a_n} & \text{si } |t|\leq 1.\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

$\longrightarrow$ $\forall n\in\mathbb{N}$, p_n est mesurable, positive (bien définie car $a_n>0$)

$\longrightarrow$ $\int_{\mathbb{R}} p_n(t)\,dt = \int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^n}{a_n}\,dt = 1$

$\longrightarrow$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n = 2\int_0^1(1-t^2)^n\,dt \geq 2\int_0^1 t(1-t^2)^n\,dt = \left[-\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

→ Si $\delta \geq 1$, $\displaystyle\int_{|t|>\delta} p_n(t)\,dt = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Si $0<\delta<1$, $\displaystyle 0 \leq \int_{|t|>\delta} p_n(t)\,dt = \frac{2}{a_n}\int_{\delta}^{1}(1-t^2)^n\,dt \leq \underbrace{2(n+1)(1-\delta)(1-\delta^2)^n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$ par croissances comparées car $|1-\delta^2|<1$

Bref $\forall \delta>0$, $\displaystyle\int_{|t|>\delta} p_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

③ Soit $f\in C_c^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ à support dans $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, soit $n\in\mathbb{N}$.

Si $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, comme $\operatorname{supp} f \subset [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, $\displaystyle f*p_n(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} p_n(x-t)f(t)\,dt$.

Si $x,t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, on a $|x-t|\leq 1$

donc $\displaystyle p_n(x-t) = \frac{(1-(x-t)^2)^n}{a_n} = \sum_{k=0}^{2n} q_k(t)\,x^k$ par le binôme de Newton

où q_k est polynomiale.

Ainsi $\forall x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, $\displaystyle f*p_n(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\sum_{k=0}^{2n} q_k(t)\,x^k\,dt$

$$= \sum_{k=0}^{2n}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\,q_k(t)\,dt\right)x^k$$

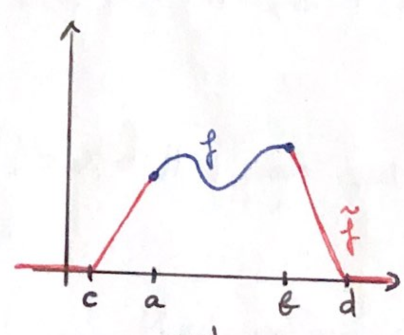
donc $f*p_n$ est polynomiale sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

D'après ce qui précède, comme (p_n) est une approx. de l'unité, $f*p_n \xrightarrow[n\to\infty]{CVU} f$ sur $\mathbb{R}$ donc sur I et f est donc limite uniforme de fonctions polynomiales sur I avec $I=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

④ Soit $J=[a,b]\subset\mathbb{R}$ et f continue sur $[a,b]$.

On prolonge f comme suit sur $[c,d]\supset[a,b]$:

On obtient $\tilde{f}\in C_c^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ à support dans $[c,d]$



Avec le changement de coordonnées $\varphi : x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \longmapsto (d-c)x+\frac{c+d}{2}\in[c,d]$,
$f\circ\varphi^{-1}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales ψ_n sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ d'après ce qui précède, donc f est limite uniforme de la suite $\psi_n\circ\varphi$ sur $[c,d]$ et donc sur $[a,b]$, qui est une suite de fonctions polynomiales car φ est affine.