

Surjectivité de $\exp: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$

Recasage: 204, 214, 156

Référence: Zavidovique (2013) p48

Théorème: $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$.

Dém:

① $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$

$\mathbb{C}[A]^\times \subset \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$ évidente. Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$, A^{-1} est un polynôme en A .

Donc si $M \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$, M^{-1} est un polynôme en M donc un polynôme en A et donc $M \in \mathbb{C}[A]^\times$.

NB: $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$ car $\mathbb{C}[A]$ est un sev fermé (car de dim. finie) de $M_n(\mathbb{C})$

② $\mathbb{C}[A]^\times$ est un ouvert connexe (par arcs) de $\mathbb{C}[A]$.

$GL_n(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$ ouvert de $M_n(\mathbb{C})$ donc $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$ (topologie induite)

Soient $M, N \in \mathbb{C}[A]^\times$ on va créer un chemin continu reliant M à N

$\varphi: z \in \mathbb{C} \mapsto zM + (1-z)N \in \mathbb{C}[A]$ est continue et $z \mapsto \det(\varphi(z))$ est polynomiale en z (non nulle car $\det(\varphi(0)) = \det N \neq 0$) donc admet un nombre fini de zéros.

On doit donc trouver un chemin $z(t)$ qui évite ces points.

Si $a \in \mathbb{R}$, $z_a: t \in [0, 1] \mapsto t + iat(1-t)$ est continue, $z_a(0) = 0$, $z_a(1) = 1$

et on voit vite que $\mathbb{R} \times]0, 1[\rightarrow \mathbb{C}$ est injective donc une infinité de $(a, t) \mapsto z_a(t)$

chemins z_a conviennent: $\exists a \in \mathbb{R}$ tq $\forall t \in]0, 1[, \det(\varphi(z_a(t))) \neq 0$ et

$\varphi \circ z_a: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}[A]^\times$ est continue avec $\gamma(0) = N$ et $\gamma(1) = M$.

Donc $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe par arcs donc connexe.

Pour montrer $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$ il suffit donc de montrer que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est non vide, ouvert et fermé dans $\mathbb{C}[A]$.

• D'après le NB, $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[A]^*$.

Ensuite $I_n = \exp(0) \in \exp(\mathbb{C}[A])$

③ $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert dans $\mathbb{C}[A]^*$

$d\exp(0) = I_n$ et $\exp: \mathbb{C}[A] \rightarrow \mathbb{C}[A]^* \cap GL_n(\mathbb{C})$ est toujours de classe C^2 avec $0 \in \mathbb{C}[A]$ et $d\exp(0) = \text{Id}_{\mathbb{C}[A]}$ est inversible. Par théorème d'inversion locale, il existe U voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}[A]$ et V voisinage ouvert de $\exp(0) = I_n$ dans $\mathbb{C}[A]^*$ (ce qui n'est possible que parce que $\mathbb{C}[A]^*$ est ouvert dans $\mathbb{C}[A]$) tq $\exp: U \rightarrow V$ soit un C^1 -difféomorphisme. On a donc $V \subset \exp(\mathbb{C}[A])$.

Si $M = \exp(N) \in \exp(\mathbb{C}[A])$, comme l'exponentielle commute sur les polynômes en A , $\exp(N+U) = \exp(N)\exp(U) = MV$. Or $X \mapsto MX$ est une homéo car $M \in GL_n(\mathbb{C})$, donc une application ouverte donc $f(V) = MV$ est un ouvert de $\exp(\mathbb{C}[A])$ contenant M (car $I_n \in V$): $\exp(\mathbb{C}[A])$ est bien ouvert (c'est un voisinage de chacun de ses points).

④ $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé dans $\mathbb{C}[A]^*$

Si $M \in \mathbb{C}[A]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ alors $M \exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ car si $M \exp(\mathbb{C}[A]) \cap \exp(\mathbb{C}[A]) \neq \emptyset$, il existe $P, Q \in \mathbb{C}[A]$ tq $M \exp P = \exp Q$ donc $M = \exp(Q-P) \in \exp(\mathbb{C}[A])$: impossible.

Donc $\bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} M \exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \in \dots} \{M\} \subset \bigcup_{M \in \dots} M \exp(\mathbb{C}[A])$

donc $\mathbb{C}[A]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} M \exp(\mathbb{C}[A])$
ouvert dans $\mathbb{C}[A]^*$
ouvert dans $\mathbb{C}[A]^*$

donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ fermé dans $\mathbb{C}[A]^*$.

$\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert, fermé, non vide dans $\mathbb{C}[A]^*$ qui est connexe: on a égalité.

(5) Conclusion: l'image de $M_n(\mathbb{C})$ par $\exp$ est $GL_n(\mathbb{C})$

Si $A \in GL_n(\mathbb{C})$, on a $A \in \mathbb{C}[A]^\times = \exp(\mathbb{C}[A])$ donc il existe $B \in \mathbb{C}[A] \subset M_n(\mathbb{C})$ tq $A = \exp(B)$.

(6) Autre application: $\exp(M_n(\mathbb{R})) = GL_n(\mathbb{R})^\times$

Par C: si $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\exp M = \exp(M/2)^2$.

Par D: si $B = A^2$ avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème $\exists P \in \mathbb{C}[x]$ tq $A = \exp(P(A))$ puis en passant au conjugué $A = \exp(\bar{P}(A))$ donc $B = A^2 = \exp((P + \bar{P})(A)) \in \exp(M_n(\mathbb{R}))$.

Détails / Questions

M^{-1} polynôme en M : $\mu_M = X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \dots + a_0$ alors $a_0 \neq 0$ sinon $M^k + \dots + a_1 M = 0$ d'où ($M \in GL_n(\mathbb{C})$) $M^{k-1} + \dots + a_1 = 0$ impossible.

$$\text{Bref } M^k + a_{k-1}M^{k-1} + \dots + a_0 I_n = 0$$

$$\text{d'où } M^{-1} = -a_0^{-1}(M^{k-1} + \dots + a_1 I_n) \in \mathbb{C}[M].$$

$d(\exp)(0) = I_n$: $H \in M_n(\mathbb{C})$, $\exp: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est de classe C^1 et

$$\begin{aligned} \exp(H) &= I_n + H + H^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{H^n}{(n+2)!} \\ &= I_n + H + o(H) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } d(\exp)(0) = I_n.$$

$\exp(\mathbb{R}[A]) \neq \mathbb{R}[A]^\times$ en général: si A est diagonale, alors $-I_n \in \mathbb{R}[A]^\times$ mais n'est pas dans l'image de l'exponentielle.

$\exp(M_n(\mathbb{R})) \neq GL_n(\mathbb{R})$: se rappeler que $\exp(M_n(\mathbb{R})) \subset GL_n^+(\mathbb{R})$

$$\triangleleft \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_n^+(\mathbb{R}) \setminus \exp(M_n(\mathbb{R})).$$