

Simplicité de $SO(3)$

Logans: 204, 208, 206, 261

Références: Caldero, NH262 Tome 2 p 15.

Prop: $n \geq 1$, $SO(n)$ est compact et connexe (par arcs).

Dém: • Soit $\phi: M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tMM$, qui est continue car chacune des composantes est polynômial en les coefficients de la matrice.

Donc $SO(n) = \phi^{-1}(\{I_n\}) \cap \det^{-1}(\{1\})$ est fermé.

Soit $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tAB)$ sur l'espace $M_n(\mathbb{R})$. On voit que pour $M \in SO(n)$,

$$\|M\| = \sqrt{\text{Tr}({}^tMM)} = \sqrt{n}.$$

Ainsi $SO(n)$ est borné (pour toutes normes car elles sont équivalentes)

Comme $SO(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ qui est de dim. finie, $SO(n)$ est compact.

- Soit $M \in SO(n)$, créons un chemin continu liant M à I_n de sorte à pouvoir ainsi relier deux matrices de $SO(n)$ par un chemin passant par I_n .
D'après le théorème de réduction, il existe $P \in GL(n)$ tq

$$M = P \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{2p} & \\ & & R_{\theta_1} \\ & & \ddots \\ & & R_{\theta_s} \end{pmatrix} {}^tP \quad \text{avec} \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

$$\text{On pose alors } M(t) = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & R_{t\pi} & \\ & & \ddots \\ & & R_{t\pi} \\ & & & R_{t\theta_1} \\ & & & \ddots \\ & & & & R_{t\theta_s} \end{pmatrix} \quad \text{pour } t \in [0, 1].$$

p blocs

Alors $\gamma: t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t) = PM(t){}^tP$ est continu de $[0, 1]$ dans $SO(n)$ et relie $\gamma(0) = I_n$ à $\gamma(1) = M$.

$SO(n)$ est donc connexe car connexe par arcs. □

Théorème: $SO(3)$ est simple.

Dém: Soit $H \triangleleft SO(3)$ non trivial, comme les renversements engendrent $SO(n)$ (Cartan-Dieudonné) et qu'ils sont conjugués dans $SO(3)$, il suffit de montrer que H contient un renversement pour obtenir $H = SO(3)$.

Si $h \neq I_3$ dans H , on pose $\varphi: SO(3) \rightarrow \mathbb{R}$

$$g \mapsto \text{Tr}([g, h]) = \text{Tr}(ghg^{-1}h^{-1})$$

On a $\varphi(I_3) = \text{Tr}(I_3) = 3$.

$SO(3)$ est compact, connexe et contient I_3 donc $\varphi(SO(3))$ est un segment $[a, b]$ qui contient 3.

Or la trace d'un élément de $SO(3)$ est de la forme $1 + 2\cos\theta$ où θ est l'angle de la rotation. Ainsi $\varphi(SO(3)) = [a, 3]$ avec $a \in [-1, 3]$.

Supposons que $a = 3$, alors $\forall g \in SO(3), ghg^{-1}h^{-1} = I_3$ (il n'y a qu'une matrice de $SO(3)$ de trace 3: I_3). Donc $h \in Z(SO(3))$.

Si $u \in Z(SO(3))$, $\forall D$ droite de l'espace $\mathbb{R}^3$, on note π_D le renversement de droite D , on a alors $\pi_D = u\pi_D u^{-1} = \pi_{u(D)}$ donc $D = u(D)$ et ce $\forall D$ droite de $\mathbb{R}^3$. Donc u est une homothétie: il n'y en a qu'une dans $SO(3)$, c'est I_3 . Donc $h \in Z(SO(3)) = \{I_3\}$: absurde.

Donc $a < 3 = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2\cos(\frac{\pi}{n}))$: il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tq

$$a < 1 + 2\cos(\frac{\pi}{n}) < 3$$

Soit g_n dans $SO(3)$ tel que $\varphi(g_n) = 1 + 2\cos(\frac{\pi}{n})$ i.e que $h_n = [g_n, h] = g_n h g_n^{-1} h^{-1}$ est une rotation de trace $1 + 2\cos(\frac{\pi}{n})$ donc d'angle $\pm \frac{\pi}{n}$. On a $h_n \in H$ car H est distingué et h_n^* est une rotation d'angle π de H , i.e un renversement de H .

Perrin: renversement
Calders: renversement

Détails / Compléments

Lemme: Les renversements engendrent $SO(3)$ et sont conjugués dans $SO(3)$.

Dém: • D'après le théorème de Cartan-Dieudonné, et comme les réflexions sont de déterminant -1 , tout élément $u \neq I_3$ s'écrit $u = \tau_1 \tau_2$ avec τ_1, τ_2 des réflexions. Alors, on le voit matriciellement, $\sigma_i = -\tau_i$ est un renversement et $u = \sigma_1 \sigma_2$ (l'argument ne marchant plus en dimension > 3)

Perrin p 143

• Soient r_D et $r_{D'}$ deux renversements de droites respectives D et D' engendrées par d et d' respectivement. Alors si on prend g une rotation d'axe orthogonal au plan engendré par d et d' : $g \in SO(3)$ et envoie D sur D' . Ainsi :

$g r_D g^{-1}$ est un renversement d'axe $g(D) = D'$ i.e. $g r_D g^{-1} = r_{D'}$.

Perrin p 144

Caldero NH262 (2)

p 18

(Le polynôme caractéristique étant un invariant de similitude, $g r_D g^{-1}$ admet le même spectre que r_D et le sous-espace propre $E_{-1} = D$ est envoyé "par principe de conjugaison" sur $g(E_{-1}) = D'$ qui est alors le sous-espace propre de $r_{D'}$ associé à la vp -1 i.e. $g r_D g^{-1}$ est le renversement d'axe D' : c'est $r_{D'}$ et r_D et $r_{D'}$ sont donc bien conjugués). $\square$

Perrin p 144

Moralement, on complète d et d' en deux bases orthogonales (d, e_1, e_2) et (d', e'_1, e'_2) et on prend g matrice de passage de l'une à l'autre : g est donc orthogonale et quitte à changer d en $-d$ on peut supposer $\det g = 1$ et donc $g \in SO(3)$ et envoie D sur D' .

Théorème de Cartan-Dieudonné

$\forall n \geq 2$, $O(n)$ est engendré par les réflexions orthogonales : tout élément $u \in O(n)$ s'écrit comme produit d'au plus n réflexions orthogonales.

$\forall n \geq 3$, $SO(n)$ est engendré par les renversements : tout élément $u \in SO(n)$ est produit d'au plus n renversements.

$SO(3)$ est distinguée dans $O(3)$: c'est le noyau du $\det$ sur $O(3)$.

$$\text{car: } \forall A \in SO(3), \forall B \in O(3), \det(B^{-1}AB) = \det A = 1.$$

Le centre de $O(n)$ et $SO(n)$ est composé de leurs homothéties:

Calders NH262(2)
p 17

Si $z \in Z(O(n))$, soit D une droite quelconque et s la réflexion par rapport à l'hyperplan $D^\perp$. Comme z commute avec s , l'endomorphisme z stabilise tout sous-espace propre de s , donc en particulier z stabilise D . Comme z stabilise toutes les droites, c'est une homothétie.

Si $z \in SO(n)$, abus de même, z stabilise tout plan (car $SO(n)$ est engendré par les renversements) et comme toute droite peut être réalisée comme intersection de deux plans, z stabilise toute droite donc est une homothétie.

Conclusion: $Z(O(n)) = \{\pm I_n\}$, $Z(SO(n)) = \begin{cases} \{I_n\} & \text{si } n \text{ impair} \\ \{\pm I_n\} & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$

Culture: $SO(n) \begin{cases} \text{est simple si } n \text{ impair} \\ \text{contient le sous-groupe distingué } \{\pm I_n\} \text{ si } n \text{ pair.} \end{cases}$

$u \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie $\Leftrightarrow u$ laisse stable toute droite vectorielle de E :
 u stabilise toutes les droites vectorielles de $E \Leftrightarrow \forall x \in E, (x, u(x))$ est liée.
 $\Leftrightarrow u$ est une homothétie.

Détails des détails: Si r_D est un renversement d'axe D de $SO(3)$, $\forall g \in SO(3)$, $g r_D g^{-1} = r_{g(D)}$:

- Si $v = g(x) \in g(D)$, $g r_D g^{-1}(v) = g r_D(x) = g(x) = v$.
- Si $v \in g(D)^\perp = g(D^\perp)$ (car $g \in SO(3)$ préserve l'orthogonalité),
 $v = g(x) \in g(D^\perp)$, $g r_D g^{-1}(v) = g r_D(x) = g(-x) = -g(x) = -v$.

Bref $g r_D g^{-1}(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in g(D) \\ -v & \text{si } v \in g(D)^\perp \end{cases} \quad \text{i.e. } g r_D g^{-1} = r_{g(D)}$