

Inégalité isopérimétrique

Recasage: 246, 267

Références: Zwilly, Queffelec p 103, Bernis et Bernis p 81

Théorème: soit $[a, b]$ compact de $\mathbb{R}$, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe de Jordan (lacet simple) de classe C^1 avec $\gamma'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$. On suppose de plus $\gamma'(a) = \gamma'(b)$.
Soit $l = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ sa longueur et S la surface enfermée par γ , alors
$$l^2 \geq 4\pi S$$

avec égalité ssi γ est un cercle parcouru une et une seule fois.

NB: S : mesure de Lebesgue de la composante connexe bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ donnée par le théorème de Jordan (existence et unicité)

Quitte à appliquer une homothétie, on peut supposer $l = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = 2\pi$.

Bernis²

En effet, avec $k = \frac{2\pi}{l}$, si on remplace γ par $k\gamma$, la nouvelle courbe est de longueur $kl = 2\pi$ tandis que la composante connexe bornée qu'elle délimite a pour surface $k^2 S$ donc les deux termes de l'inégalité sont multipliés par k^2 .

NB: une homothétie est un homéo. qui préserve les composantes connexes et la bornitude.

On va reparamétriser γ par longueur d'arc :

$\forall x \in [a, b]$ on pose $L(x) = \int_a^x |\gamma'(t)| dt$ de sorte que, par hypothèse, L est de classe C^1 et sa dérivée $L'(x) = |\gamma'(x)| > 0$ donc L est C^1 , injective (car strict. croissante) et de dérivée inversible sur $]a, b[$ donc par théorème d'inversion globale, L induit un C^1 -difféomorphisme de $]a, b[$ sur $]0, 2\pi[$. On envoie a sur 0 et b sur 2π . donc en particulier, L est bijective de $[a, b]$ dans $[0, 2\pi]$, on pose la courbe de

C^1 partant grâce à l'hypothèse
 $\gamma'(a) = \gamma'(b)$

Jordan de classe C^1 $\tau = \gamma \circ L^{-1} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$.

Si $s \in [0, 2\pi]$ on a alors,

$$\begin{aligned} \int_0^s |\tau'(t)| dt &= \int_0^s |(L^{-1})'(t) \gamma'(L^{-1}(t))| dt \\ du &= (L^{-1})'(t) dt \quad \int_{L^{-1}(0)}^{L^{-1}(s)} |\gamma'(u)| du \\ u &= L^{-1}(t) \quad L^{-1}(0) \\ &= \int_a^{L^{-1}(s)} |\gamma'(u)| du \\ &= L(L^{-1}(s)) = s \end{aligned}$$

En dérivant, d'après le TFA, $|\tau'(s)| = 1 \quad \forall s \in [0, 2\pi]$.

Donc τ est une nouvelle paramétrisation de l'arc qu'il parcourt à vitesse constante.

Par ailleurs, quitte à changer $\tau(s)$ en $\tau(2\pi - s)$, on peut supposer que l'arc τ est orienté positivement.

Lemme:

Avec $\tau(t) = x(t) + iy(t)$, on a $S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt$
 $= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \tau'(t) \overline{\tau(t)} dt.$

Dém:

$$S = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{C_0}(x, y) dx dy = \iint_{C_0} dx dy. \text{ Soient } \begin{cases} f(x, y) = -\frac{y}{2} \\ g(x, y) = \frac{x}{2} \end{cases}$$

D'après Jordan

$$\partial C_0 = \tau([0, 2\pi])$$

et C_0 est un compact à bord

donc on peut

appliquer

Green-Riemann.

Par la formule de Green-Riemann, on a :

$$\begin{aligned} S &= \iint_{C_0} (\underbrace{\partial_x g(x, y) - \partial_y f(x, y)}_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1}) dx dy \stackrel{\text{GR}}{=} \int_{\tau} f(x, y) dx + g(x, y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \tau'(t) \overline{\tau(t)} dt. \end{aligned}$$

simple
calcul

□

Comme $\tau(0) = \tau(2\pi)$, on peut prolonger τ en une fonction 2π -périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, dont les coefficients de Fourier sont donnés par

$$\forall m \in \mathbb{Z}, c_m(\tau) = \int_0^{2\pi} e^{-ims} \tau(s) \frac{ds}{2\pi}$$

$$\ell = 2\pi = \int_0^{2\pi} \underbrace{|\tau'(s)|}_{=1} ds = \int_0^{2\pi} \underbrace{|\tau'(s)|^2}_{=1} ds$$

$$= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m(\tau')|^2 \text{ d'après Parseval}$$

$$= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |im c_m(\tau)|^2 \text{ car } c_m(\tau') = im c_m(\tau)$$

$$= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m^2 |c_m(\tau)|^2$$

D'après le lemme,

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \tau'(t) \overline{\tau(t)} dt$$

Prop. IV.5 p 215
Zurly. Quellec

$$= \pi \operatorname{Im} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \underbrace{c_m(\tau') \overline{c_m(\tau)}}_{= im |c_m(\tau)|^2} \text{ d'après Parseval (version p.5)}$$

$$= \pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m |c_m(\tau)|^2$$

$$\text{Donc } \ell^2 - 4\pi S = 2\pi(\ell - 2S) = (2\pi)^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (m^2 - m) |c_m(\tau)|^2 \geq 0$$

Cas d'égalité:

$m^2 \geq m$ si $m \notin \{0, 1\}$ donc $\ell^2 = 4\pi S \Leftrightarrow c_m(\tau) = 0 \forall m \neq 0, 1$

unicité $\Leftrightarrow \forall s \in [0, 2\pi]$,
des coeff. de Fourier $\tau(s) = g(\tau) + c_1(\tau) e^{is}$

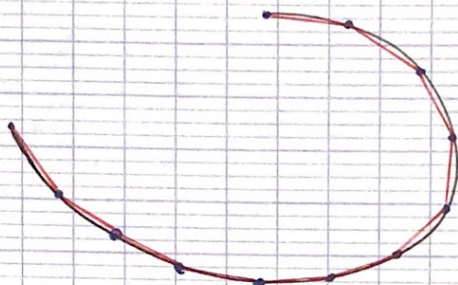
i.e égalité $\Leftrightarrow \tau$ (dans γ) est un cercle parcouru une seule fois. $\square$

Détails

Def / Prop:

Une arc paramétrisé $\gamma: [a, b] \rightarrow E$ est dit rectifiable si $\sup L_\sigma$ existe avec $L_\sigma = \sum_{j=1}^n \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|$, σ subdivision $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ de $[a, b]$. Sa j^o longueur est alors $L = \sup_\sigma L_\sigma$.
Si γ est C^1 , il est rectifiable et on a $L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

voir Rouvière p 126
pour les détails



Intuition physique: longueur de la courbe = $\int dl$ sur la courbe

être sur la courbe: $\frac{dl}{dt} = v$

$$\|dl\| = \|v\| dt \text{ d'où } l = \int \|\gamma'(t)\| dt$$

Parseval:

Zuily - Queffelec p 215

P. Colmez p 286

$(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ base hilbertienne de H , $x \in H$ alors $\|x\|^2 = \sum_{\mathbb{Z}} |\langle x, e_n \rangle|^2$

Si $x, y \in H$, on a de plus $\langle x, y \rangle = \sum_{\mathbb{Z}} \langle x, e_i \rangle \cdot \overline{\langle y, e_i \rangle}$.

"Dém": • On a $\sum_{i=-n}^n \langle x, e_i \rangle e_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ donc par continuité de la norme,

$$\left\| \sum_{i=-n}^n \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x\|^2 \text{ ce qui, par orthonormalité des } e_i$$

(et donc par Pythagore), $\sum_{i=-n}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x\|^2$.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ On a } 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle \cdot \overline{\langle y, e_n \rangle}| &\leq \sum_{\mathbb{Z}} |\langle x, e_n \rangle|^2 + \sum_{\mathbb{Z}} |\langle y, e_n \rangle|^2 \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Comme précédemment, $\sum_{i=-n}^n \langle x, e_i \rangle e_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ et $\sum_{i=-n}^n \langle y, e_i \rangle e_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$

Comme le p.s est une forme bilinéaire continue (par Cauchy-Schwarz),

$$\left\langle \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_j \langle y, e_j \rangle e_j \right\rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle$$

$$\sum_i \sum_j \langle x, e_i \rangle \cdot \overline{\langle y, e_j \rangle} \cdot \langle e_i, e_j \rangle = \sum_i \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}$$

$$\text{d'où } \langle x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^n \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}$$

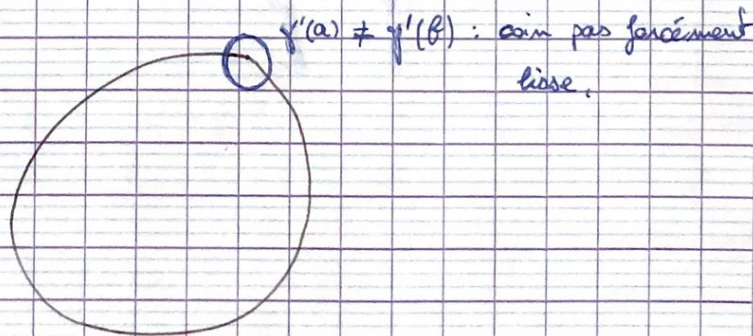
Green-Riemann Soit Ω un ouvert C^1 de $\mathbb{R}^2$ dont le bord $\partial\Omega$ est décrit par la courbe paramétrée $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $\gamma'(t) \neq 0 \forall t \in [0,1]$
 $\forall P, Q$ fonctions C^1 sur $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (\partial_x Q - \partial_y P)(x, y) dx dy &= \int_{\gamma} P dx + Q dy \\ &= \int_0^1 (P(\gamma(t)) \gamma'_1(t) + Q(\gamma(t)) \gamma'_2(t)) dt. \end{aligned}$$

Hypothèse

$$\gamma'(a) = \gamma'(b)$$

On la fait pour se donner un cas aussi favorable que possible avec un C_0 régulier pour pouvoir appliquer convenablement la formule de Green-Riemann ; on évite les cas pathologiques où on a un angle :



⚠ τ est 2π -périodique donc il ne faut pas écrire $c_n(\tau) = \int_0^1 e^{-2i\pi n s} \tau(s) ds$,
 pas 1-périodique