

Théorème de Fourier - Plancherel

Legons: 207, 235, 250

Références: Rudin, 3^e édition, p225

Conventions: $dm(x) = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$, $\tau_a f(x) = f(x-a)$

Théorème:

Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on peut associer $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ telle que:

i) si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f} = \hat{F}(f)$ est la transformée de Fourier de f

ii) $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

iii) l'application $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même.

iv) si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $A > 0$, en posant $\varphi_A(t) = \int_{-A}^A f(x) e^{-ixt} dm(x)$

$$\text{et } \varphi_A(x) = \int_{-A}^A \hat{f}(t) e^{ixt} dm(t), \text{ on a } \begin{cases} \|\hat{f} - \varphi_A\|_2 \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0 \\ \|f - \varphi_A\|_2 \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0. \end{cases}$$

Dém:

① Pour $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, montrons que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et que $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Posons $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ et $g = f * \tilde{f}$. On va montrer que g est continue et dans $L^1(\mathbb{R})$ et $L^\infty(\mathbb{R})$ pour pouvoir conclure avec une approximation de l'unité et passer à la limite.

• f et $\tilde{f}$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ donc $g \in L^1(\mathbb{R})$

• Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \tilde{f}(y) dm(y) = \int_{\mathbb{R}} f(y+x) \overline{f(y)} dm(y) \\ &= \langle \tau_{-x} f, f \rangle \end{aligned}$$

On $x \in \mathbb{R} \mapsto \tau_{-x} f \in L^2(\mathbb{R})$ est continue et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est continu sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, donc g est continue.

• Par Cauchy-Schwarz, $|g(x)| \leq \|\tau_{-x} f\|_2 \cdot \|f\|_2 = \|f\|_2^2$ donc $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

(0): approx. de l'unité (voir détails)

(1) Comme $g \in L^1(\mathbb{R})$, on peut écrire $(g * h_\lambda)(0) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{g}(t) dt$

$$\text{avec } \hat{g}(t) = \widehat{g * \tilde{f}}(t) = \hat{f}(t) \hat{\tilde{f}}(t) = \hat{f}(t) \overline{\hat{f}(t)} = |\hat{f}(t)|^2.$$

(2) D'autre part, comme g est continue (en 0) et dans $L^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$g(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (g * h_\lambda)(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) |\hat{f}(t)|^2 dt.$$

La suite de fonctions $(H(\lambda t) |\hat{f}(t)|^2)_\lambda$ est positive, croissante vers $|\hat{f}(t)|^2$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$ donc d'après le théorème de convergence monotone, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 = g(0) &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{\lambda \rightarrow 0} H(\lambda t) |\hat{f}(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t)|^2 dt \\ &= \|\hat{f}\|_2^2. \end{aligned}$$

d'où $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ par positivité de la norme.

(2) En posant $Y = \{\hat{f} : f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})\}$, montrons que $Y^\perp = \{0\}$ i.e. que $Y^\perp = \{0\}$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$, on pose $g_{\alpha, \lambda}(x) = e^{i\alpha x} H(\lambda x)$ de sorte que $g_{\alpha, \lambda} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et on a donc $\widehat{g_{\alpha, \lambda}} \in Y$ et :

$$\widehat{g_{\alpha, \lambda}}(t) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda x) e^{i(\alpha - t)x} dx = h_\lambda(\alpha - t)$$

Si $w \in L^2(\mathbb{R})$ et $w \in Y^\perp$, on calcule

$$0 = \langle \widehat{g_{\alpha, \lambda}}, w \rangle = \int_{\mathbb{R}} h_\lambda(\alpha - t) \overline{w(t)} dt = h_\lambda * \bar{w}(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

(3) On sait que $\|\bar{w} - h_\lambda * \bar{w}\|_2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$ donc $\|\bar{w}\|_2 = \|w\|_2 = 0$ donc $w = 0$ (dans L^2)

donc $Y^\perp = \{0\}$ et Y est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

③ Prolongement de $\hat{F}: L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$ tout entier.

(4) On a donc $f \mapsto \hat{f}$ isométrique (au sens de L^2) entre deux sous-espaces denses de $L^2(\mathbb{R})$ (entre $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et Y).

Si $g \in L^2(\mathbb{R})$, il existe donc (f_n) suite de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ telle que $\|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$. En particulier (f_n) est de Cauchy et comme $\|\hat{F}(f_n)\|_2 = \|f_n\|_2$, la suite $(\hat{F}(f_n))$ est encore de Cauchy, dans $Y \subset L^2$.

Comme $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ est complet, il existe $\tilde{\hat{F}}(f) \in \bar{Y} = L^2(\mathbb{R})$ telle que $\|\tilde{\hat{F}}(f) - \hat{F}(f_n)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On a alors $\|f\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{F}(f_n)\|_2 = \|\tilde{\hat{F}}(f)\|_2$.

On pose donc $\hat{f} = \hat{F}(f) := \tilde{\hat{F}}(f)$ et on continue de noter $\hat{F}$ le prolongement ainsi obtenu sur $L^2(\mathbb{R})$.

④ $\hat{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.

- $\hat{F}$ est linéaire sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ donc a fortiori sur $L^2(\mathbb{R})$.
- $\hat{F}$ est une isométrie donc est en particulier injective.
- Montrons que $\hat{F}$ est surjective i.e que $\hat{F}(L^2(\mathbb{R})) := H = L^2(\mathbb{R})$.

↳ Soit $(\hat{f}_n)$ une suite de H convergeant vers $g \in L^2(\mathbb{R})$.

$(\hat{f}_n)$ est donc de Cauchy et comme $\hat{F}$ est une isométrie, (f_n) est de Cauchy dans L^2 qui est complet donc $\exists f \in L^2$ tq $f_n \xrightarrow{L^2} f$.

Mais $\hat{F}$ est une isométrie donc est continue, donc

$$\hat{f}_n = \hat{F}(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{F}(f) = g \text{ par unicité donc } g \in H.$$

↳ Si $g \in H^\perp \subset L^2$, comme Y est dense dans L^2 , $\exists (\hat{f}_n)$ suite de Y

tq $f_n \xrightarrow{L^2} g$. On a alors $\langle \hat{f}_n, g \rangle = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|g\|_2^2$ par continuité du p.s. Donc $g=0$ d'où $H^\perp = \{0\}$.

Donc $H = H = L^2(\mathbb{R})$ d'où la surjectivité de $\hat{F}$.

⑤ Le point iv) du théorème.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varphi_A &= \widehat{\mathbb{1}_{[-A,A]} f} \text{ donc } \|\hat{f} - \varphi_A\|_2 = \|\hat{f} - \widehat{\mathbb{1}_{[-A,A]} f}\|_2 \\ &= \|\hat{f} - \mathbb{1}_{[-A,A]} \hat{f}\|_2 \text{ par isométrie} \\ &\xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \varphi_A(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-A,A]} \hat{f}(t) e^{ixt} dm(t)$$

On $\mathbb{1}_{[-A,A]} \hat{f} = \mathbb{1}_{[-A,A]} \hat{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ donc par la formule d'inversion de Fourier (sur $L^1(\mathbb{R})$), $\varphi_A = \hat{F}^{-1}(\mathbb{1}_{[-A,A]} \hat{F}(f))$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \|\hat{f} - \varphi_A\|_2 &= \|\hat{F}^{-1}(\hat{F}(f)) - \hat{F}^{-1}(\mathbb{1}_{[-A,A]} \hat{F}(f))\|_2 \\ &= \|\hat{F}^{-1}(\hat{F}(f) - \mathbb{1}_{[-A,A]} \hat{F}(f))\|_2 \\ &= \|\hat{f} - \mathbb{1}_{[-A,A]} \hat{f}\|_2 \\ &\xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

NB: ce point iv) peut constituer une sorte de théorème d'inversion de Fourier, au sens de $L^2(\mathbb{R})$ cette fois-ci.

NB2: la formule de Parseval reste donc valable pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dm(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \overline{\hat{g}(t)} dm(t).$$

Détails

Rudin p 223 (a) Approximation de l'unité (à admettre / inclure dans le plan)

attention à prendre
 $dm(x) = dx / \sqrt{2\pi}$.

$$\varphi: x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2} \text{ est positive et } \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dm(x) = 1.$$

Par conséquent, la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{n}{1+n^2 x^2}$ est une approximation de l'unité. Version continue:

$$\lambda = \frac{1}{n} > 0, \quad h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$$

$$\text{Si } H(t) = e^{-|t|}, \text{ alors } h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{ixt} dm(t)$$

$$\text{et } \forall f \in L^1(\mathbb{R}), \quad h_\lambda * f(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{ixt} dm(t) \quad (\text{par Fubini})$$

Par ailleurs, $0 < H(t) \leq 1$ et $(H(\lambda t))_\lambda$ est une suite positive, croissante vers 1 lorsque $\lambda \rightarrow 0$.

Rudin p 223 (1) Pour $g \in L^1(\mathbb{R})$, $(g * h_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{g}(t) e^{itx} dm(t)$

Thm 3.8

$$\begin{aligned} \text{Par Fubini, } (g * h_\lambda)(x) &= \int_{\mathbb{R}} g(x-y) \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{ity} dm(t) dm(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \int_{\mathbb{R}} g(x-y) e^{ity} dm(y) dm(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{it(x-y)} dm(y) dm(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{g}(t) e^{itx} dm(t) \end{aligned}$$

Rudin p 224
thm 9.9

(2) Si $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et est continue en x , $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (g * h_\lambda)(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{On écrit } (g * h_\lambda)(x) - g(x) &= \int_{\mathbb{R}} (g(x-y) - g(x)) h_\lambda(y) \, d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (g(x-y) - g(x)) \lambda^{-1} h_\lambda\left(\frac{y}{\lambda}\right) d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (g(x-\lambda s) - g(x)) h_\lambda(s) \, d\mu(s) \\ &\leq 2 \|g\|_\infty h_\lambda(s) \text{ qui est } \int_{\mathbb{R}} h_\lambda(s) \, d\mu(s) = 1 \end{aligned}$$

Donc par convergence dominée, $(g * h_\lambda)(x) - g(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$

Rudin p 224
thm 9.10

(3) Pour $1 \leq p < \infty$ et $w \in L^p(\mathbb{R})$, on a $\|w - w * h_\lambda\|_p \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Puisque $h_\lambda \in L^q(\mathbb{R})$, $w * h_\lambda$ est bien définie (par Hölder).

$$(w * h_\lambda)(x) - w(x) = \int_{\mathbb{R}} (w(x-y) - w(x)) h_\lambda(y) \, d\mu(y)$$

Comme $p \geq 1$, l'inégalité de Jensen montre que

$$|w * h_\lambda(x) - w(x)|^p \leq \int_{\mathbb{R}} |w(x-y) - w(x)|^p h_\lambda(y) \, d\mu(y)$$

En intégrant et en appliquant Fubini,

$$\begin{aligned} \|w * h_\lambda - w\|_p^p &\leq \int_{\mathbb{R}} \| \tau_y w - w \|_p^p h_\lambda(y) \, d\mu(y) \\ &\quad \underbrace{g(y) \text{ bornée, continue, nulle en } 0}_{\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} g(0) = 0 \text{ via (2)}} \end{aligned}$$

Donc $\|w * h_\lambda - w\|_p \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$.

(4) $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\int_{\mathbb{R}} |\mathbb{1}_{[-A,A]} f(x)|^2 dx \leq \|f\|_2^2 < \infty$

et $\int_{\mathbb{R}} |\mathbb{1}_{[-A,A]} f(x)| dx \leq \|f\|_2 \cdot \left(\frac{A}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}$ par Cauchy-Schwarz
 $< \infty$

autrement dit $\mathbb{1}_{[-A,A]} f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

On $\mathbb{1}_{[-A,A]} f \xrightarrow[A \rightarrow \infty]{\text{cvs}} f$ et on a la domination $|\mathbb{1}_{[-A,A]} f - f|^2 \leq |f|^2$

donc par convergence dominée, $\|\mathbb{1}_{[-A,A]} f - f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\mathbb{1}_{[-A,A]} f - f|^2 dx$

$\xrightarrow[A \rightarrow \infty]{} 0$

donc $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$.

Rudin p 224 (5) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on a la formule d'inversion
 Thm 9.11

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} dt \text{ presque partout.}$$

On a par (1), $(f * h_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{ixt} dt$

$$\xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

par convergence dominée

voir Rudin p 83
 Thm 3.12

On sait que toute suite de Cauchy dans L^p admet une sous-suite qui converge (simplement) presque partout donc d'après (3):

$\exists (\lambda_n)$ de limite nulle tq $\lim_{n \rightarrow \infty} (f * h_{\lambda_n})(x) = f(x)$ presque partout.

$$\text{Ainsi } f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} dt \text{ presque partout.}$$

Rudin p 225 (b) Injectivité de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

Thm 9.12

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifie $\hat{f} = 0$, on a $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et par la formule d'inversion,
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{-ixt} dt = 0 \text{ presque partout, i.e. } f = 0 \text{ (dans } L^1).$$

L'injectivité provient donc de la linéarité de $\hat{f}$.