[QZ] p. 92 et 99

Formule sommatoire de Poisson et application

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par $\hat{f} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\,dx \end{array}$

<u>Théorème</u> : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle qu'il existe $M > 0$ et $\alpha > 1$ vérifiant $|f(x)| \leqslant \dfrac{M}{(1+|x|)^\alpha}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(m)| < +\infty$, alors $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) = 2\pi \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(2\pi m)$.

<u>Démonstration</u> : Pour $|x| \leqslant A$ et $|m| \geqslant A$, on a $|x + 2\pi m| \geqslant 2\pi|m| - |x| \geq |m|$, donc $|f(x+2\pi m)| \leqslant \dfrac{M}{(1+|m|)^\alpha}$, donc la série de fonctions $\sum_m f(x+2\pi m)$ converge normalement sur tout compact, ce qui permet de définir la fonction continue 2π-périodique $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+2\pi m) \end{array}$.

On calcule alors le coefficient de Fourier de φ d'indice m :

$$c_m(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(x+2k\pi) e^{-imx}\,dx \qquad \text{par convergence normale}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(y) e^{-imy}\,dy \qquad \text{en posant } y = x + 2k\pi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-imy}\,dy \qquad \text{car } f \in L^1(\mathbb{R}).$$

$$= \frac{1}{2\pi} \hat{f}(m)$$

Par hypothèse, on a $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m(\varphi)| = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(m)| < +\infty$, donc la série de Fourier de φ converge normalement sur $\mathbb{R}$, vers φ.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m)\, e^{imx}$,

donc $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m)\, e^{imx}$, ce qui donne le résultat

en évaluant en 0.

Application : On pose $\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ t & \longmapsto & \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t m^2} \end{array}$. Alors pour tout $t > 0$,

on a $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, \theta\left(\frac{1}{t}\right)$.

Lemme : On pose $G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ u & \longmapsto & e^{-u^2/2} \end{array}$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$\hat{G}(\xi) = \sqrt{2\pi}\; e^{-\xi^2/2}$.

Démonstration : Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a $\hat{G}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\, G(x)\, dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\, e^{-x^2/2}\, dx$$

On pose alors $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\xi, x) & \longmapsto & e^{-i\xi x}\, e^{-x^2/2} \end{array}$, intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\xi \longmapsto F(\xi, x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour $x, \xi \in \mathbb{R}$,

on a $\frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi, x) = -ix\, e^{-i\xi x}\, e^{-x^2/2}$

De plus, pour $x, \xi \in \mathbb{R}$, on a $\left|\frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi, x)\right| = |x|\, e^{-x^2/2}$,

et $x \longmapsto |x|\, e^{-x^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par théorème de dérivation sous l'intégrale, $\hat{G}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

on a
$$\begin{aligned}\hat{G}'(\xi) &= -i \int_{\mathbb{R}} x\, e^{-i\xi x} e^{-x^2/2}\, dx \\ &= -i \left(\left[-e^{-x^2/2} e^{-i\xi x} \right]_{-\infty}^{+\infty} - i\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{-x^2/2}\, dx \right) \\ &= -\xi \hat{G}(\xi)\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{G}(\xi) = \hat{G}(0)\, e^{-\xi^2/2}$.

Or $\hat{G}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$, ce qui permet de conclure.

<u>Preuve de l'application :</u> On pose $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & e^{-ax^2} \end{array}$, avec $a > 0$.

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x}\, dx &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\sqrt{2a}\,x)^2}{2}} e^{-i\xi x}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2} e^{-i\frac{\xi}{\sqrt{2a}} u}\, du\end{aligned}$$

d'où $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \hat{G}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2a}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, G\left(\frac{\xi}{\sqrt{2a}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\xi^2/4a}$.

La formule de Poisson appliquée à f donne alors $\sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-m^2/4a} = 2\pi \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-4a\pi^2 m^2}$.

Pour tout $t > 0$, on a donc $\theta(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t m^2} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-4a\pi^2 m^2}$, avec $a = \frac{t}{4\pi}$,

d'où
$$\begin{aligned}\theta(t) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-m^2/4a} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4\pi^2}{t}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi m^2}{t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}}\, \theta\left(\frac{1}{t}\right)\end{aligned}$$
, ce qui achève la preuve.