

Equation de la chaleur

Leçons: 209, 222, 241, 246

Référence: Zwiller, Quelfelec, 3^e éd. p 106

Soient $L > 0$ et $Q =]0, L[\times]0, +\infty[$. On considère le problème suivant:

(iii): température nulle aux bords

(iv): température initiale donnée par h

$$(EC) \begin{cases} u \in C^0(\bar{Q}) \cap C^2(Q) & (i) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in Q & (ii) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \forall t \in]0, +\infty[& (iii) \\ u(x, 0) = h(x) & \forall x \in]0, L[& (iv) \end{cases}$$

où h est de classe C^2 sur $[0, L]$ vérifiant $h(0) = h(L) = 0$, $h \not\equiv 0$.

Théorème: Le problème (EC) admet une unique solution, qui est de plus de classe C^∞ sur Q .

Dém: ① Existence: analyse par la méthode de séparation des variables.

$f \in C^2, g \in C^1$

On cherche u sous la forme $u(x, t) = f(x)g(t)$ de sorte à ce que l'équation devienne $f(x)g'(t) = f''(x)g(t)$. On cherche une solution telle que f et g ne s'annulent pas sur Q . On a alors:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)} \quad \forall (x, t) \in Q$$

ce qui n'est possible que si les deux membres de cette équation sont égaux à une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ i.e. $\begin{cases} f''(x) = \lambda f(x) & \forall x \in]0, L[\\ g'(t) = \lambda g(t) & \forall t \in]0, +\infty[\end{cases}$

• Si $\lambda > 0$, on a $f(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

$$(iii) \Rightarrow u(0, t) = f(0)g(t) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 = A+B$$

$$(iii) \Rightarrow f(L) = 0 = A\sinh(\sqrt{\lambda}L) \Rightarrow A=B=0$$

Donc $f \equiv 0$ et $u \equiv 0$ ce qui contredit (iv) en général.

- Si $\lambda = 0$, alors $f(x) = Ax + B$ et les conditions aux bords donnent encore $u = 0$.
- Si $\lambda < 0$, soit μ une racine de $-\lambda$, alors $f(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x)$ et $g(t) = \exp(-\mu^2 t)$. Les conditions au bord donnent alors $A = f(0) = 0$ et $B \sin(\mu L) = f(L) = 0$ donc $\mu = \frac{n\pi}{L}$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.

On obtient donc une famille de solutions possibles :

$$\left\{ u_n(x, t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$b_n \in \mathbb{R}$

Clairément $\forall n \in \mathbb{Z}$, u_n est solution de (ii) mais il n'y a aucune raison pour que la condition initiale $b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = h(x)$ soit respectée. Comme (ii) est linéaire, toute somme finie de telles u_n est encore solution mais encore une fois, pas de raison pour que la condition initiale (iv) soit respectée.

L'idée est donc de prendre une somme infinie :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right).$$

Si on peut dériver terme à terme, elle vérifiera automatiquement (ii) d'après ce qui précède. On aura également $u(0, t) = u(L, t) = 0$, d'où (iii). Par ailleurs, (iv) devient $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$: cette égalité traduit le fait que les b_n doivent être les coefficients de Fourier d'une fonction impaire $\tilde{h}$ égale à h sur $[0, L]$ et dont la série de Fourier converge vers elle-même sur $[0, L]$.

(2) Existence : synthèse

Soit h_1 la fonction définie sur $[-L, L]$ par $h_1(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in [0, L] \\ -h(-x) & \text{si } x \in [-L, 0] \end{cases}$

probablement...

Comme $h(0) = 0$, h_1 est de classe C^1 sur $[-L, L]$. On prend $\tilde{h}$ la fonction $2L$ -périodique sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec h_1 sur $[-L, L]$.

en fait C^2 ...

Comme $\tilde{h}(L) = 0$, $\tilde{h}$ est continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Ainsi d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de $\tilde{h}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{h}$, et ses coefficients (réels) de Fourier sont :

$$\begin{cases} \forall n \geq 0, a_n(\tilde{h}) = 0 \text{ car } \tilde{h} \text{ est impaire.} \\ \forall n \geq 1, b_n = b_n(\tilde{h}) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \tilde{h}(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt \\ = \frac{2}{L} \int_0^L h(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt \end{cases}$$

On a donc $\tilde{h}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge absolument.

Ainsi $u: \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x,t) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

u vérifie (iv), (iii) est bien définie et continue d'après le théorème de continuité sous le signe somme (car $|u_n(x,t)| \leq |b_n|$) par construction.

Les u_n sont toutes de classe C^∞ sur Q .

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\forall (x,t) \in]0,L[\times]\varepsilon, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{\alpha+\beta} u_n}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}(x,t) \right| &= \left| b_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^\alpha \underbrace{\sin \text{ ou } \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}_{| \cdot | \leq 1} \left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)^\beta \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right) \right| \\ &\leq |b_n| \left(\frac{n\pi}{L}\right)^{\alpha+\beta} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\varepsilon\right) \\ &\text{bornée car} \\ &\rightarrow 0 \text{ par Riemann-Lebesgue.} \end{aligned}$$

donc $\sum_{n \geq 1} \frac{\partial^{\alpha+\beta} u_n}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}$ GVN donc CUV sur tout compact de Q .

u vérifie (i)

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, u est C^∞ sur Q et en dérivant terme à terme, $\forall (x,t) \in Q$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t) = 0 \text{ donc } u \text{ vérifie (ii)}$$

= 0

Bref u est bien solution de (EC).

Bernoulli p 97

ou

Evans, PDE p 63

③ Unicité: une méthode d'énergie.

Soient u_1 et u_2 solutions de (EC) et posons $w = u_1 - u_2$. Alors w vérifie clairement (i), (ii) et (iii) et $w(\cdot, 0) \equiv 0$.

On pose l'énergie $e(t) = \int_0^L w^2(x, t) dx$ pour $t \in [0, +\infty[$.

Par ailleurs, $\frac{\partial w^2}{\partial t}$ existe et est continue sur $[0, L] \times [0, +\infty[$ et $[0, L]$ est compact donc par théorème de dérivation sous l'intégrale, e est C^1 sur $[0, +\infty[$ et on a:

$$\begin{aligned} e'(t) &= 2 \int_0^L w(x, t) \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) dx \stackrel{(i)}{=} 2 \int_0^L w(x, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) dx \\ &= 2 \left[w(x, t) \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \right]_{x=0}^L \stackrel{(iii)}{=} 0 \text{ via } \\ &\quad - 2 \int_0^L \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) dx \\ &= -2 \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

En intégrant, $e(t) - e(0) \leq 0$ i.e. $e(t) \leq e(0) = 0$ car $w(\cdot, 0) \equiv 0$. Or $e(t) \geq 0$ donc $e(t) = 0 = \underbrace{\int_0^L w^2(x, t) dx}_{\geq 0 \text{ continue}}$

donc $w(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \bar{Q}$ d'où $u_1 = u_2$. $\square$

Bonus

Zuily-Queffelec
p 108

Principe du maximum pour l'équation de la chaleur:

Soit $u \in C^0(\bar{Q}) \cap C^2(Q)$ telle que $\forall (x,t) \in Q$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \geq 0$.
Soient $T > 0$ et $K = [0, L] \cap [0, T]$, alors:

$$\sup_{(x,t) \in K} u(x,t) = \sup_{(x,t) \in K \cap \partial Q} u(x,t).$$

On considère l'opérateur différentielle $P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $u_\varepsilon : (x,t) \mapsto u(x,t) + \varepsilon x^2$ qui vérifie $Pu_\varepsilon = Pu + 2\varepsilon$
 $\geq 2\varepsilon$ sur Q .

Soit $m_\varepsilon = (x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ un point de K où u_ε atteint son maximum sur K .

Supposons par l'absurde que $m_\varepsilon \notin K \cap \partial Q$. Dans ce cas,

$$\begin{cases} 0 < x_\varepsilon < L \text{ donc } \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(m_\varepsilon) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(m_\varepsilon) \leq 0 \\ 0 < t_\varepsilon < T \text{ donc } \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(m_\varepsilon) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \left(\frac{u_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon - h) - u_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon)}{-h} \right) \geq 0 \end{cases}$$

Il en résulte que $Pu_\varepsilon(m_\varepsilon) \leq 0$ ce qui contredit $Pu_\varepsilon(m_\varepsilon) \geq 2\varepsilon$.

Ainsi $m_\varepsilon \in K \cap \partial Q$ puis:

$$\sup_K u(x,t) \leq \sup_K u_\varepsilon(x,t) = \sup_{K \cap \partial Q} u_\varepsilon(x,t) \leq \sup_{K \cap \partial Q} u(x,t) + \varepsilon L^2$$

On fait tendre $\varepsilon \rightarrow 0$ ce qui conclut. $\square$

Application :
(unicité)

Si u_1 et u_2 sont deux solutions de (EC) et posons $w = u_1 - u_2$, qui vérifie (i), (ii) et $w(x,t) \stackrel{(*)}{=} 0 \quad \forall (x,t) \in \partial Q$. Fixons $T > 0$, puisque $Pw = 0$ sur Q . Par principe du maximum et $(*)$, $w(x,T) \leq 0$. Puisque $P(-w) = 0$ sur Q on a de même $-w(x,T) \leq 0$ d'où $w(x,T) = 0$ et comme T est arbitraire, $w \equiv 0$ sur Q .