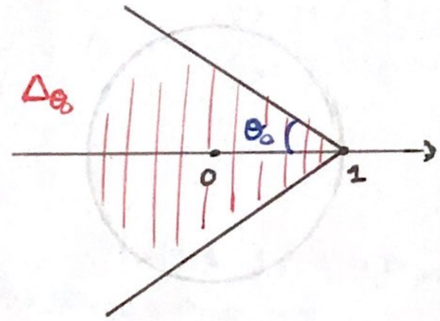
Théorèmes d'Abel angulaire & taubérien faible

Recasage : 207, 230, 241, 243

Référence : Gourdon, Analyse p. 263-264



Théorème (Abel angulaire)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1, on note $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sur le disque unité. Pour $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on pose

$$\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \text{ tq } z = 1 - \rho e^{i\theta} \}.$$

Si $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge, alors $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

On pose $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $R_n = S - S_n$.

Comme $S_n \xrightarrow[n \to \infty]{} S$, on a $R_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ comme reste d'une série convergente.

Par transformation d'Abel, $\forall |z| < 1$ et $\forall N \geq 1$,

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{N} a_n z^n}_{\xrightarrow[N \to \infty]{} f(z)} - \underbrace{S_N}_{\xrightarrow[N \to \infty]{} S} = \sum_{n=0}^{N} a_n (z^n - 1) = \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} R_n ((z^{n+1} - 1) - (z^n - 1)) + R_0 (z - 1) - R_N (z^{N+1} - 1)$$

$$= (z-1) \sum_{n=0}^{N} R_n z^n - \underbrace{R_N}_{\xrightarrow[N\infty]{} 0} (\underbrace{z^{N+1}}_{\xrightarrow[N\infty]{} 0 \text{ car } |z|<1} - 1)$$

En passant à la limite $(N \to \infty)$, on trouve :

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n$$

où $\sum_{n \geq 0} R_n z^n$ converge par transformation d'Abel.

Soit désormais $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $|R_n| < \varepsilon \ \forall n > N$. Si $|z| < 1$, on a alors :

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \cdot \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \varepsilon |z-1| \sum_{n=N+1}^{\infty} |z|^n$$

$$\leq |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| \cdot \underbrace{|z|^n}_{\leq 1} + \varepsilon |z-1| \frac{1}{1-|z|} \quad \text{car } |z| < 1$$

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}$$

Si $z \in \Delta_{\theta_0}$, on l'écrit $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$.

On a $|z|^2 = (1-\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 = 1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2$ donc si $\rho \leq \cos\theta_0$,

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}\cdot(1+|z|) = \frac{\rho}{2\rho\cos\theta - \rho^2}\underbrace{(1+|z|)}_{<1} < \frac{2}{2\cos\theta - \rho}$$

$$\leq \frac{2}{2\cos\theta - \cos\theta_0}$$

$$\leq \frac{2}{2\cos\theta_0 - \cos\theta_0} = \frac{2}{\cos\theta_0}$$

{car $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $|\theta| \leq \theta_0$ donc $\cos\theta \geq \cos\theta_0 \geq 0$}

Soit enfin $\alpha > 0$ tel que $\alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| < \varepsilon$ donc si $\rho \leq \min(\alpha, \cos\theta_0)$,

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon + \varepsilon\frac{2}{\cos\theta_0} = \varepsilon\left(1 + \frac{2}{\cos\theta_0}\right) \quad \text{d'où } f(z) \xrightarrow[\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}]{} S. \qquad \square$$

Théorème (taubérien faible) : soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f. On suppose que l'on a $S \in \mathbb{C}$ tq $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{} S$.
Alors si $a_n = o(\frac{1}{n})$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]0,1[$, $S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$

Donc $|S_n - f(x)| \leq |1-x| \sum_{k=1}^{n} |a_k|\cdot|1+x+\dots+x^{k-1}| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\cdot|x|^k$

$$\leq |1-x|\cdot\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k}{n}|a_k|\cdot|x|^k$$

$$\leq |1-x|\cdot n\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \frac{\sup_{k>n} k|a_k|}{n(1-x)}$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Par hypothèse, la suite $(na_n)_{n\geq 1}$ est de limite nulle donc sa moyenne de Césaro aussi et comme $\sup_{k>n} k|a_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} \limsup k|a_k| = 0$ donc il existe $N \geq 1$ tq $\forall n \geq N$,
$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k|a_k| < \varepsilon$ et $\sup_{k>n} k|a_k| < \varepsilon$. On prend $x = x_n = 1 - \frac{1}{n} \in]0,1[$;

$$|S_n - f(1-\tfrac{1}{n})| \leq \frac{1}{n}\cdot n\cdot\varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Or par hypothèse, $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ x<1}]{} S$ donc il existe $N' \geq 1$ tq $\forall n \geq N'$, $|f(1-\frac{1}{n}) - S| \leq \varepsilon$

Ainsi $\forall n \geq \max(N, N')$, $|S_n - S| \leq |S_n - f(1-\frac{1}{n})| + |f(1-\frac{1}{n}) - S|$

$$\leq 3\varepsilon$$

d'où $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$ i.e $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. $\square$