Générateurs de GL(K), SL(K)

Leçons : 162, 108

Réf : Berhuy 2e ed. p79 ou FGN Algèbre 2 p177.

Théorème : Soient K un corps, $n \geq 1$.

i) $SL_n(K)$ est engendré par les matrices de transvection.

ii) $GL_n(K)$ est engendré par les matrices de transvection et de dilatation.

Dém : i) On montre par récurrence sur n que si $M \in SL_n(K)$, il existe $r, s \in \mathbb{N}$ et $T_1, \dots, T_r, T_1', \dots, T_s'$ des matrices de transvection telles que $T_1 \cdots T_r M T_1' \cdots T_s' = I_n$. Comme l'inverse d'une matrice de transvection est encore une matrice de transvection, M s'écrit comme produit de matrices de transvection, ce qui conclut.

par ailleurs, les transvections sont bien dans $SL_n(K)$.

Pour $n = 1$ il n'y a rien à faire.

Soit $M = (m_{ij}) \in SL_{n+1}(K)$.

- Si $m_{11} = 0$, comme M est inversible, $\mathrm{rg}\, M = n+1$ donc il existe $2 \leq j \leq n+1$ tq $m_{1j} \neq 0$.

On multiplie M à droite par $T_{j1}(1)$, ce qui revient à faire l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_j$ ce qui donne un coefficient $m_{11}' \neq 0$ (c'est m_{1j}).

Bref quitte à multiplier par une matrice de transvection, on peut supposer $m_{11} \neq 0$.

De même on se ramène à $m_{21} \neq 0$ quitte à multiplier à gauche par $T_{21}(1)$ (ce qui équivaut à faire l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$).

Ensuite, en multipliant à gauche par $T_{12}\left(\frac{1-m_{11}}{m_{21}}\right)$ i.e $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1-m_{11}}{m_{21}} L_2$ on se ramène à $m_{11} = 1$.

On s'est donc ramené à $\begin{pmatrix} 1 & * \, - \, * \\ * & \\ | & M' \\ * & \end{pmatrix}$

Il reste à faire un pivot de Gauss pour annuler les coeff. sur la première ligne et la première colonne. Pour cela il suffit de faire :

$$T_{n+1,1}(-a_{n+1,1}) \cdots T_{2,1}(-a_{2,1})\, M\, T_{1,2}(-a_{1,2}) \cdots T_{1,n+1}(-a_{1,n+1})$$

On obtient ainsi: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = M''$ avec $M' \in SL_n(K)$.

Par hypothèse de récurrence, $\exists r, s \in \mathbb{N}$, $P_1, \dots, P_r, P'_1, \dots, P'_s \in \mathcal{M}_n(K)$ des matrices de transvection tq $P_1 \cdots P_r M' P'_1 \cdots P'_s = I_n$.

Pour $\begin{cases} 1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s \end{cases}$ on pose $T_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_i \end{pmatrix}$ et $T'_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'_j \end{pmatrix}$

qui sont des matrices de transvection de $\mathcal{M}_{n+1}(K)$ et vérifiant:

$$T_1 \cdots T_r M'' T'_1 \cdots T'_s = I_{n+1}.$$

ii) Si $M \in GL_n(K)$ et $\mu = \det M$. On note $D_n(\mu) = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1, \mu)$

Alors $M D_n(\mu^{-1}) \in SL_n(K)$ donc d'après i) il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et $T_1, \dots, T_r$ des matrices de transvection de $\mathcal{M}_n(K)$ tq

$$M D_n(\mu^{-1}) = T_1 \cdots T_r$$

donc $M = T_1 \cdots T_r D_n(\mu)$ ce qui conclut. □

♡ Appli: si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $SL_n(\mathbb{K})$ est connexe (par arcs)

Dém: Si $M \in SL_n(\mathbb{K})$, il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tq

$$M = T_{i_1, j_1}(\lambda_1) \cdots T_{i_r, j_r}(\lambda_r).$$

Alors $\gamma : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & SL_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \prod_{k=1}^{r} T_{i_k, j_k}((1-t)\lambda_k) \end{array}$ est continue et $\begin{cases} \gamma(0) = M \\ \gamma(1) = I_n. \end{cases}$

On peut donc relier toute matrice de $SL_n(\mathbb{K})$ à I_n par un chemin continu. □

♡ Appli: $GL_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes: $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$.

Dém: $GL_n(\mathbb{R}) = GL_n^+(\mathbb{R}) \amalg GL_n^-(\mathbb{R})$ donc il suffit de vérifier la connexité (par arcs) de ces deux ensembles.

Pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$ on pose $\mu = \det M$. et $D(\alpha) = D_n(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 1 & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$

• Dans $GL_n^+(\mathbb{R})$: on relie $M \in GL_n^+(\mathbb{R})$ à I_n.

D'après le théorème, on écrit $M = \prod_{k=1}^{r} T_{i_k, j_k}(\lambda_k) \times D(\mu)$.

Alors $\gamma : [0,1] \longrightarrow GL_n^+(\mathbb{R})$ est continue
$t \longmapsto \prod_{k=1}^{r} T_{i_k, j_k}((1-t)\lambda_k) D((1-t)\mu + t)$ et $\begin{cases} \gamma(0) = M \\ \gamma(1) = I_n \end{cases}$

• Dans $GL_n^-(\mathbb{R})$: on relie $M \in GL_n^-(\mathbb{R})$ à $J = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$.

on prend $\gamma : t \in [0,1] \mapsto \prod_{k=1}^{r} T_{i_k, j_k}((1-t)\lambda_k) D((1-t)\mu - t)$
continue de $\gamma(0) = M$ à $\gamma(1) = J$. □

Compléments

• $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe (par arcs) : voir Zavidovique.

FGN Algèbre 2 p 178

• $T_{i,j}(\lambda) M$ équivaut à faire l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$:

Pour $i \neq j$, $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$.

Donc $$\left[T_{i,j}(\lambda) M\right]_{k,\ell} = \sum_{m=0}^{n} \left[T_{i,j}(\lambda)\right]_{k,m} M_{m,\ell}$$
$$= \begin{cases} M_{i,\ell} + \lambda M_{j,\ell} & \text{si } k = i \\ M_{k,\ell} & \text{si } k \neq i \end{cases}$$

• $M T_{i,j}(\lambda)$ équivaut à faire l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$

L'opération change le signe du dét. donc on ne peut pas échanger deux lignes.

• On peut échanger deux lignes (ou deux colonnes) uniquement à l'aide de transvections modulo un changement de signe : si on multiplie à gauche par $T_{i,j}(1) T_{j,i}(-1) T_{i,j}(1)$ on fait $L_i \leftarrow L_j$ et $L_j \leftarrow -L_i$.

· <u>Rappel</u> : le centre de $GL_n(K)$ est l'ensemble des homothéties de $\mathcal{M}_n(K)$ qui est donc isomorphe à K^*.
le centre de $SL_n(K)$ est l'ensemble $\{\lambda I_n : \lambda^n = 1\}$ qui est donc isomorphe au groupe des racines n-ièmes de l'unité dans le corps K (donc son cardinal dépend du corps K, par exemple il n'y a qu'une seule racine 2^n-ième de l'unité dans une clôture algébrique de $\mathbb{F}_2$ par Frobenius).