

Décomposition de Dunford

Recasage: 153, 154, 155, 157

Réf: Rombaldi p. 613 / Berhuy p. 368 / Mansuy p. 105

Théorème: K un corps, E un K -ev et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé.

Alors il existe un unique couple (d, m) d'endomorphismes tq $u = d + m$, d est diagonalisable, m nilpotent et commute avec d . De plus, $d, m \in K[u]$.

Dém: par hypothèse, on peut écrire $\chi_u = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ avec α_k multiplicité de la valeur propre λ_k et on pose $N_k := \text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k}$ sous-espace caractéristique de u associé à λ_k : c'est un sous-espace stable par u .
D'après Cayley-Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux, on a $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_r$ et la projection π_k sur N_k parallèlement à $\bigoplus_{i \neq k} N_i$ est un polynôme en u . Il suffit donc de définir d et m sur chaque N_k comme suit:

Sur N_k , on a $u|_{N_k} = \lambda_k \text{Id}_{N_k}$ et $(u|_{N_k} - \lambda_k \text{Id}_{N_k})^{\alpha_k} = 0$

d_k et m_k sont des endo sur N_k car il est stable par u .

donc avec $d_k = \lambda_k \text{Id}_{N_k}$ homothétie et $m_k = u|_{N_k} - \lambda_k \text{Id}_{N_k}$ nilpotente avec ce qui précède, on a $u|_{N_k} = d_k + m_k$ et d_k commute avec m_k .

On pose alors $d = \sum_{k=1}^r \lambda_k \pi_k$ et $m = u - d = \sum_{k=1}^r m_k \circ \pi_k$.

Par construction $u = d + m$.

Ensuite d est un polynôme comme somme de polynômes en u (les π_k) donc $m = u - d$ l'est aussi. Or $K[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ donc d et m commutent.

Comme $\pi_i \circ \pi_j = 0 \ \forall i \neq j$ et $\pi_i \circ \pi_i = \pi_i$, comme les π_k commutent avec u ,

on a $m^q = \sum_{k=1}^r m_k^q \pi_k$ donc m est nilpotent, d'indice $\leq \max(\alpha_k)$.

Comme $d|_{N_k} = d_k$ est une homothétie, d est diagonalisable dans une base adaptée à la somme directe donc est a fortiori diagonalisable.

Unicité: écrivons $u = d + m = d' + m'$ de sorte que $d - d' = m' - m$

Comme d' et m' commutent, ils commutent aussi avec u et donc avec d et m qui sont des polynômes en u .

Écrire la
formule
du binôme

m et m' sont nilpotents et commutent donc $m' - m$ est nilpotent.

Par ailleurs, d et d' sont diagonalisables et commutent donc sont codiagonalisables donc $d - d'$ est diagonalisable. Ainsi $d - d' = m' - m$ est diagonalisable et nilpotent donc $d - d' = 0 = m' - m$ d'où $d = d'$ et $m = m'$. $\square$

Conséquence: si χ_A est scindé, A est diagonalisable $\Leftrightarrow e^A$ est diagonalisable.

Dém: $\Rightarrow$ Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les vp de A et $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ associée,

$$e^A x_i = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) x_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^n x_i)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^n x_i}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^n}{n!} \right) x_i$$

$$\begin{aligned} & \text{si } B_n \rightarrow B \\ & \|B_n x - Bx\| \leq \|B_n - B\| \cdot \|x\| \\ & \text{donc } B_n x \rightarrow Bx \end{aligned}$$

continuité de la multiplication
par un scalaire dans un ev.

$$\text{donc } e^A x_i = e^{\lambda_i} x_i$$

$$\text{donc } \exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ tq } e^A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$\Leftarrow$ Comme χ_A est scindé, on écrit Duford: $A = D + N$. Comme D et N commutent, $e^A = e^D e^N$ d'où $e^N = e^A e^{-D}$. Or e^A est diagonalisable, e^{-D} aussi via $\Rightarrow$ et e^A commute avec e^{-D} donc elles sont codiagonalisables et e^N est ainsi diagonalisable.

Soit p le plus petit entier ≥ 1 tel que $N^p = 0$ de sorte que X^p soit le polynôme minimal de N . Ainsi: $e^N = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{N^i}{i!}$ donc $e^N - I_n = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{N^i}{i!}$. Comme les N^i sont nilpotents et commutent, $e^N - I_n$ est nilpotente.

Première, $e^N - I_n$ est diagonalisable car e^N et I_n le sont et commutent.

Donc $e^N - I_n = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{N^i}{i!} = 0$ donc $\sum_{i=1}^{p-1} \frac{X^i}{i!}$ est divisible par $X^p - 1$ ce qui n'est possible que si $p=1$. Donc $N=0$ et $A=D$ est bien diagonalisable. $\square$

Détails

Diagonalisable + nilpotent = endomorphisme nul

Nilpotent $\Rightarrow$ la seule valeur propre est 0

Diagonalisable $\Rightarrow$ semblable à $\begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ endomorphisme nul.

• Version généralisée: X_n plus forcément scindé, d diagonalisable sur une clôture algébrique (i.e d semi-simple)

• Décomposition de Dunford de e^A en fonction de celle de $A = D + N$? (F6N2 p247)

Comme D et N commutent, on a $e^A = e^D e^N$. Comme N est nilpotente, il existe

$n \geq 1$ tq $N^n = 0$ donc $e^N = I_n + N'$ avec $N' = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!} = NP(N)$ avec P un polynôme, donc N' est nilpotente.

La matrice e^D est diagonalisable car si $D = P^{-1} \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$, alors on a

$e^D = P^{-1} \text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P$. De plus e^D et e^N commutent et N' commute avec

e^D donc on peut écrire $e^A = e^D + e^D N'$: c'est la décomposition de Dunford de e^A car $e^D N'$ est nilpotente et commute avec e^D .

• Déterminer les matrices A de $M_n(\mathbb{C})$ tq $e^A = I_n$.

L'unicité de la décomposition de Dunford donne que $e^A = I_n \Leftrightarrow \begin{cases} e^D = I_n \\ e^D N' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^D = I_n \\ N' = 0 \end{cases}$

Or $N' = NP(N)$ avec $P = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{X^{k-1}}{k!}$ qui a pour coeff. constant 1.

$P(N)$ est donc inversible: en effet, dans une base triangulisant N, on obtient une matrice unipotente car triangulaire (supérieure) avec des 1 sur la diago.

Comme $N' = 0$, on trouve donc $N = 0$ et A est donc diagonalisable.

Dans une base diagonalisant A, les valeurs propres de A doivent ainsi être dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

On vérifie aisément que toute matrice diagonalisable dont le spectre est contenu dans $2i\pi\mathbb{Z}$ a pour image I_n par l'exponentielle.

NB: la seule solution réelle est I_n .

• e^A est un polynôme en A: $\mathbb{K}[A]$ est un sev de $M_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie

donc $\mathbb{K}[A]$ est fermé donc $e^A = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{K}[A]$.

Détails (suite)

Rambaldi p 609.

Lemme des noyaux: $P := P_1 \dots P_n$ avec $P_1, \dots, P_n$ deux à deux premiers entre eux, alors $\forall u \in \mathcal{L}(E)$

$$\text{Ker } P(u) = \text{Ker } P_1(u) \oplus \dots \oplus \text{Ker } P_n(u)$$

Dém: par récurrence, il suffit de le montrer pour deux polynômes P et Q premiers entre eux.

D'après Bézout, $\exists U, V \in K[X]$ tq $1 = UP + VQ$ donc $\text{id}_E = U(u)P(u) + V(u)Q(u)$.

Si $x \in \text{Ker } P(u) \cap \text{Ker } Q(u)$, on a $x = \text{id}(x) = U(u) \circ P(u)(x) + V(u) \circ Q(u)(x) = 0$ donc la somme $\text{Ker } P(u) + \text{Ker } Q(u)$ est directe.

Si $x \in \text{Ker } P(u)$, on a $x = U(u) \circ P(u)(x) + V(u) \circ Q(u)(x)$ donc

$$Q(u) \circ (P(u) \circ U(u))(x) = U(u) \circ P(u) \circ Q(u)(x) = U(u) \circ (PQ)(u)(x) = U(u)(0) = 0$$

donc $P(u) \circ U(u)(x) \in \text{Ker } Q(u)$. De même $V(u) \circ Q(u)(x) \in \text{Ker } P(u)$.

donc $x = U(u) \circ P(u)(x) + V(u) \circ Q(u)(x) \in \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u)$.

Si $x = x_1 + x_2 \in \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u)$,

$$(PQ)(u)(x) = (PQ)(u)(x_1) + (PQ)(u)(x_2)$$

$$= Q(u) \circ P(u)(x_1) + P(u) \circ Q(u)(x_2) = Q(u)(0) + P(u)(0) = 0 + 0 = 0.$$

Donc on a bien $\text{Ker } (PQ)(u) = \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u)$. $\square$

Lemme: $\forall 1 \leq k \leq n$, la projection π_k sur $\text{Ker } P_k(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq k} \text{Ker } P_j(u)$ est un polynôme en u .

Dém: soit $Q_k = \prod_{j \neq k} P_j$: les Q_k sont premiers entre eux dans leur ensemble donc

d'après le théorème de Bézout, $\exists R_1, \dots, R_n \in K[X]$ tq $\sum_{k=1}^n Q_k R_k = 1$.

Montrons que $Q_k R_k(u) = \pi_k$. Soit $x \in E$, montrons que $Q_k R_k(u)(x) \in \text{Ker } P_k(u)$.

$$P_k(u)(Q_k R_k(u)(x)) = R_k(u) \circ ((P_k Q_k)(u))(x) = R_k(u) \circ \left(\prod_{j=1}^n P_j \right)(u)(x) = 0.$$

Ainsi $\text{Im}(Q_k R_k(u)) \subset \text{Ker } P_k(u)$.

$$\text{Soit } x = \sum_{j \neq k} x_j \in \bigoplus_{j \neq k} \text{Ker } P_j(u). \quad Q_k R_k(u)(x) = \sum_{j \neq k} Q_k R_k(u)(x_j) = \sum_{j \neq k} R_k(u) \circ Q_k(u)(x_j)$$

$$\forall i \neq k, Q_k(u)(x_i) = \prod_{j \neq k} P_j(u)(x_i) = 0 \text{ donc } Q_k R_k(u)(x) = 0.$$

Donc $\bigoplus_{j \neq k} \text{Ker } P_j(u) \subset \text{Ker } (Q_k R_k)(u)$. Or d'après le lemme des noyaux, on sait que

$$\bigoplus_{j=1}^n \text{Ker } P_j(u) = \text{Ker } \left(\prod_{j=1}^n P_j \right)(u) = E \text{ donc } Q_k R_k(u) : E = \text{Ker } P_k(u) \oplus \bigoplus_{j \neq k} \text{Ker } P_j(u) \rightarrow E$$

$$x = x_k + y_k \mapsto x_k$$

est bien π_k donc π_k est bien un polynôme en u . $\square$