

Décomposition polaire pour $O(p, q)$

Leçons: 150, 158, 171

Référence: Galdino NH262 Tome 1 p 359

|| Pour $p, q \geq 0$ tq $p+q = n$, on note $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$ et $O(p, q)$ le

sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ des isométries pour la forme quadratique

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$$

i.e $O(p, q) = \text{Stab}(I_{p,q}) = \{ P \in GL_n(\mathbb{R}) : P I_{p,q} {}^t P = I_{p,q} \}$.

Théorème: Si $p, q \geq 1$, il existe un homéomorphisme $O(p, q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.

Dém: ① $O(p, q)$ est stable par transposition (on dit qu'il est auto adjoint):

Si $M \in O(p, q)$ alors $M I_{p,q} {}^t M = I_{p,q}$ donc $({}^t M)^{-1} I_{p,q} M^{-1} = I_{p,q}$
 donc $({}^t M)^{-1} \in O(p, q)$
 donc ${}^t M \in O(p, q)$.

② La décomposition polaire induit un homéo. $O(p, q) \xrightarrow{\sim} (O(n) \times O(p, q)) \times (S_n^{++}(\mathbb{R}) / O(p, q))$
 $O(p, q) \xleftarrow{\sim} (O, S)$

Si $M \in O(p, q) \subset GL_n(\mathbb{R})$, on l'écrit de manière unique $M = OS$ avec $O \in O(n)$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrons que $O, S \in O(p, q)$. Pour cela, il suffit de montrer que $S \in O(p, q)$.

Si on note $T = {}^t M M$ on sait que $S^2 = T$ et d'après le premier point, $T \in O(p, q)$.
 donc on veut passer à la racine en passant par l'exponentielle.

Comme $T = S^2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et que $\exp$ réalise un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$, on écrit (de manière unique) $T = \exp U$ avec $U \in S_n(\mathbb{R})$.

bijectivité de $\exp$ sur $S_n(\mathbb{R})$.

en remontant les équivalences

$$\begin{aligned}
 T \in O(p, q) &\Leftrightarrow T I_{p, q} {}^t T = I_{p, q} \Leftrightarrow {}^t T = I_{p, q}^{-1} T^{-1} I_{p, q} \\
 &\Leftrightarrow {}^t \exp U = I_{p, q}^{-1} (\exp U)^{-1} I_{p, q} \\
 &\Leftrightarrow \exp({}^t U) = \exp(-I_{p, q}^{-1} U I_{p, q}) \\
 &\Leftrightarrow U = {}^t U = -I_{p, q}^{-1} U I_{p, q} \\
 &\Leftrightarrow U I_{p, q} + I_{p, q} U = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{U}{2} I_{p, q} + I_{p, q} \frac{U}{2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow {}^t \exp\left(\frac{U}{2}\right) = I_{p, q}^{-1} (\exp \frac{U}{2})^{-1} I_{p, q}
 \end{aligned}$$

On $\exp \frac{U}{2} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $(\exp(\frac{U}{2}))^2 = \exp U = T$ donc par unicité de la racine carrée sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$, $S = \exp(\frac{U}{2})$ donc $S I_{p, q} {}^t S = I_{p, q}$ i.e. $S \in O(p, q)$. Donc $O \in O(p, q)$ aussi et la décomposition polaire induit l'homéomorphisme

$$\begin{aligned}
 O(p, q) &\xrightarrow{\cong} (O(n) \cap O(p, q)) \times (S_n^{++}(\mathbb{R}) \cap O(p, q)) \\
 OS &\longleftarrow (O, S)
 \end{aligned}$$

③ On montre que $O(p, q) \cap O(m) \cong O(p) \times O(q)$.

Si $O \in O(m) \cap O(p, q)$, on écrit $O = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ de sorte que

$$O I_{p, q} {}^t O = I_{p, q} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t A & {}^t C \\ {}^t B & {}^t D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & -B \\ C & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t A & {}^t C \\ {}^t B & {}^t D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A {}^t A - B {}^t B & A {}^t C - B {}^t D \\ C {}^t A - D {}^t B & C {}^t C - D {}^t D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

$$\text{et } O {}^t O = I_n = I_{p+q} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t A & {}^t C \\ {}^t B & {}^t D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A {}^t A + B {}^t B & A {}^t C + B {}^t D \\ C {}^t A + D {}^t B & C {}^t C + D {}^t D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

On trouve donc $B^t B = C^t C = 0$ et comme $(M, N) \mapsto T_2(M^t N)$ est un produit scalaire, il en résulte $B = C = 0$. Donc $A^t A = I_p$ et $D^t D = I_q$ i.e. $A \in O(p)$, $D \in O(q)$.

Après vérification rapide de l'inclusion réciproque, on obtient :

$$O(p, q) \cap O(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} : A \in O(p), D \in O(q) \right\} \simeq O(p) \times O(q).$$

④ On montre que $O(p, q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pq}$.

On pose $L = \{U \in M_n(\mathbb{R}) : U I_{p,q} + I_{p,q} U = 0\}$, on a montré plus tôt que exp réalise une bijection entre $L \cap S_n(\mathbb{R})$ et $O(p, q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R})$. On exp réalise un homéo. entre $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc induit un homéo. entre $O(p, q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq L \cap S_n(\mathbb{R})$.

Si $U = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & D \end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{R})$ avec A, D symétriques, alors comme

$$U I_{p,q} + I_{p,q} U = 2 \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \text{ on a } U \in L \Leftrightarrow A = D = 0$$

$$\text{Ainsi } L \cap S_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} : B \in M_{p,q}(\mathbb{R}) \right\} \simeq \mathbb{R}^{pq}$$

$$\text{d'où } O(p, q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq L \cap S_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pq}.$$

$$\text{Ainsi } O(p, q) \simeq (O(p, q) \cap O(n)) \times (O(p, q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R})) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}.$$

$$\text{exp: } S_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ homéo. : p357}$$

$$O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R}) \text{ homéo: p348}$$

Appli: i) $O(p, q)$ est compact si $p=0$ ou $q=0$

ii) $O(p, q)$ admet 4 composantes connexes si $p, q \neq 0$.