

Autour du commutant.

Recasage: 151, 162

Réf: FGN, Algèbre 2 p 160

Lemme: $\forall A \in M_n(K), \dim C(A) \geq n$.

Dém: soit L une extension de K sur laquelle χ_A est scindé et donc sur laquelle est triangulisable: $\exists P \in GL_n(L), \exists T \in M_n(L)$ triangulaire supérieure tq $A = PTP^{-1}$.

On pose $\varphi: M_n(K) \rightarrow M_n(K)$ et $\tilde{\varphi}: M_n(L) \rightarrow M_n(L)$ de sorte que

$$X \mapsto AX - XA \quad \text{et} \quad X \mapsto AX - XA$$

$$C(A) = \text{Ker } \varphi \quad \text{et} \quad \text{rg } \varphi = \text{rg } \tilde{\varphi}.$$

En effet $\text{rg}_K(M) = \text{rg}_L(M)$ car: $\forall M \in M_n(K), M \in GL_n(K) \Leftrightarrow \det M \neq 0$
 le calcul du det. ne changeant pas dans K et L . $(\Rightarrow) M \in GL_n(L)$
 Toute sous-matrice est inversible sur K ssi elle l'est sur L donc la taille max. d'une telle sous-matrice est la même sur K et sur L i.e $\text{rg}_K = \text{rg}_L$.

Soit $E = PT_n(L)P^{-1}$ sev de $M_n(L)$

$\forall X = PX'P^{-1} \in E$, on a $P^{-1}\tilde{\varphi}(X)P = TX' - X'T$ qui est triangulaire supérieure stricte (car les coeff diagonaux sont les $T_{ii}X'_{ii} - X'_{ii}T_{ii} = 0$)

$$\text{Donc } \text{rg}(\tilde{\varphi}|_E) = \text{rg}(P^{-1}\tilde{\varphi}|_E P) \leq \dim T_n^0(L) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \dim \text{Ker } \tilde{\varphi} &\geq \dim \text{Ker } \tilde{\varphi}|_E = \dim E - \text{rg}(\tilde{\varphi}|_E) \\ &= \dim T_n(L) - \text{rg}(\tilde{\varphi}|_E) \\ &\geq \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \dim C(A) = \dim \text{Ker } \varphi = \dim \text{Ker } \tilde{\varphi} \geq n. \quad \square$$

Lemme: $\forall A \in M_n(K), \dim K[A] = \deg \mu_A \leq n$.

Théorème: $\forall A \in M_n(K), C(A) = K[A] \Leftrightarrow \mu_A = \chi_A \Leftrightarrow A \text{ est cyclique.}$

Dém: $\Rightarrow$ par les lemmes, on a $\deg \mu_A = \dim K[A] = \dim C(A) \geq n$
Or par Cayley-Hamilton $\deg \mu_A \leq n$ donc $\deg \mu_A = n = \deg \chi_A$
et $\mu_A \mid \chi_A$ par Cayley-Hamilton. Comme ces deux polynômes
sont unitaires, ils sont égaux.

$\Leftarrow$ $\mu_A = \chi_A$ donc A est cyclique: $\exists x \in K^n \setminus \{0\}$ tq $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$
soit une base de K^n . Soit $\varphi: B \in C(A) \mapsto Bx \in K^n$ qui est
linéaire. Si $Bx = 0$ alors $\forall k \geq 0, BA^k x = A^k Bx = 0$ donc
 B est nulle sur la base $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$ donc $B = 0$ et φ est
injective. Donc $\dim C(A) \leq \dim K^n = n$
Donc par le lemme $\dim C(A) = n = \deg \mu_A = \dim K[A]$.
Comme $K[A] \subset C(A)$ on a bien $C(A) = K[A]$. $\square$

Pourquoi $\dim_K K[A] = \deg \mu_A$?

Le morphisme d'évaluation $\Phi: P \in K[X] \mapsto P(A) \in M_n(K)$ est surjectif
par définition et son noyau est l'idéal (μ_A) . Φ passe donc au quotient
en un isomorphisme d'anneaux (donc de K -ev) entre $K[X]_{(\mu_A)}$ et $K[A]$.

Par division euclidienne par μ_A , tout polynôme en A s'écrit de façon
unique comme $R(A)$ avec $\deg R < \deg \mu_A$. Donc $K[X]_{(\mu_A)} \simeq K_{\deg \mu_A - 1}[X]$
donc $\dim_K K[A] = \dim K[X]_{(\mu_A)} = \dim K_{\deg \mu_A - 1}[X] = \deg \mu_A$.

Version systèmes: montrer que $\dim C(A) \geq n$, c'est montrer que $\dim S \geq n$ où S est l'ensemble des solutions du système linéaire $AX - XA = 0$ d'inconnue $X \in M_n(K)$

Si A est trigonalisable, on peut supposer que A est triangulaire supérieure quitte à changer de base.

Si on restreint le système à $T_n(K)$, on cherche donc des solutions X triangulaires supérieures: il reste $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues.

Comme $AX - XA$ est encore triangulaire supérieure, si X est solution cela fait $\frac{n(n+1)}{2}$ équations (celles qui annulent les $\frac{n(n+1)}{2}$ coeff.).

On peut en fait en retirer n : celles qui traduisent la nullité des coeff diagonaux car on a $\forall i, A_{ii} X_{ii} - X_{ii} A_{ii} = 0$ toujours vrai.

On a donc un système homogène à $\frac{n(n+1)}{2} - n$ équations pour $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues. Donc l'espace des solutions est de dimension au moins $\frac{n(n+1)}{2} - \left[\frac{n(n+1)}{2} - n \right] = n$, i.e $\dim(S \cap T_n(K)) \geq n$ donc a fortiori $\dim S \geq n$.

Comme on a vu tout à l'heure que $\dim \ker \varphi = \dim \ker \tilde{\varphi}$, la dimension de l'espace des solutions du système $AX - XA = 0$ reste inchangée qu'on la regarde dans K ou dans une extension L de K . On se place donc sur L tq X_A soit scindé (i.e A trigonalisable) et le résultat découle de ce qui précède.

Une telle extension L de K existe-t-elle ? Pourquoi ?

Où, il y a le corps de décomposition de X_A qui existe toujours
(par récurrence sur $\deg X_A$, si $\deg X_A > 1$,

- soit X_A a un facteur de degré 1 i.e. $P = (X - \alpha)Q$ et par HR, un corps de décomposition de Q (qui existe) en est un pour P
- soit X_A a un facteur irréductible de degré 1, donc il a un facteur de degré 1 dans un corps de rupture de ce facteur irréductible et on conclut par HR.)

On encore une clôture algébrique de K (sur laquelle tout polynôme est scindé). Existence : théorème de Steinitz

Idee de preuve: $\mathbb{R}$ infini non dénombrable si K est fini
ou de card. $>$ card K si K infini

$(L, +, \times)$, L sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui contient K
et tq $+, \times$ font de L une extension de K

$(L, +, \times) \leq (L', +, \times)$ si $L \subset L'$ et la structure de corps sur L est induite par celle de L' ; c'est une relation d'ordre et $\{(L, +, \times), \dots\}$ est ordonné inductif.

Par le lemme de Zorn, il y a un élément maximal F
et on montre que F est une clôture algébrique de K .

Pourquoi X_A est scindé $\Leftrightarrow A$ trigonalisable ? $\Leftarrow$ ok.

$\Rightarrow$ par récurrence sur $\dim E$, si $n > 1$ et X_A est scindé, X_A admet au moins une racine λ . λ est alors vp de A donc $\exists x \neq 0$ tq $Ax = \lambda x$

On complète en une base $(x, e_2, \dots, e_n)$ de E et dans cette base, $\text{Mat } A = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$

donc $X_A = (X - \lambda) X_B$ et par HR, B est trigonalisable donc A aussi.

Pourquoi $\mu_A = \chi_A \iff A$ est cyclique ? Voir FGN 2 p 143

$u \sim A$: $E_x := \text{Vect}(\{u^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}})$ est le plus petit sous-espace de E stable par u et contenant x . Si $n = \deg \mu_x$, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre donc $W = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est de dimension n .

W est un sous-espace de E_x .

Comme $\mu_x(u)(x) = 0$ (par déf. de μ_x), la famille $(x, \dots, u^{n-1}(x))$ est liée donc $u^n(x) \in W$ donc W est stable par u . Comme W contient x , on a par minimalité de E_x que $E_x \subset W$. Donc $W = E_x$ et en outre E_x est de dimension $n = \deg \mu_x$.

$\Leftarrow \exists x \in E$ tq $E_x = E$ donc tel que $\deg \mu_x = \dim E_x = \dim E = n$.

Comme $\mu_x \mid \mu_A$ on a $\deg \mu_x \geq n$ et par Cayley-Hamilton, on a $\deg \mu_A = n = \deg \chi_A$ d'où égalité car $\mu_A \mid \chi_A$ et ils sont unibires.

$\Rightarrow$ On sait qu'il existe $x \in E$ tq $\mu_x = \mu_A = \chi_A$

Pour un tel x , $\dim E_x = \deg \mu_x = \deg \mu_A = \deg \chi_A = n = \dim E$
donc $E_x = E$ et A est bien cyclique. $\square$

Cas où A est diagonalisable

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les vp deux à deux distinctes de A et $n_1, \dots, n_r$ leurs multiplicités respectives.

- On sait déjà que $\dim K[A] = \deg \mu_A$.
- Si on note $E_1, \dots, E_r$ les sous-espaces propres de A associés respectivement à $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, on sait que si $B \in C(A)$, B commute avec A donc B laisse stable chaque sous-espace E_i et induit ainsi un endomorphisme

$B_i \in \mathcal{L}(E_i)$.

On considère alors $\varphi: \begin{matrix} C(A) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1) \times \dots \times \mathcal{L}(E_n) \\ B \longmapsto (B_1, \dots, B_n) \end{matrix}$ qui est clairement

linéaire. Elle est de plus injective car si $\varphi(B) = (B_1, \dots, B_n) = 0$ alors B est nulle sur chaque E_i donc l'est sur l'espace tout entier.

Elle est aussi surjective car si $(B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{L}(E_1) \times \dots \times \mathcal{L}(E_n)$ on définit l'endomorphisme B qui coïncide avec B_i sur E_i .

Comme $B|_{E_i} = B_i$ commute avec $A|_{E_i} = \lambda_i \text{Id}_{E_i}$, B commute avec A .

Ainsi φ est un isomorphisme entre $C(A)$ et $\mathcal{L}(E_1) \times \dots \times \mathcal{L}(E_n)$ et comme $\mathcal{L}(E_i)$ est de dimension $\dim E_i^2 = m_i^2$, on a

$$\dim C(A) = m_1^2 + \dots + m_n^2.$$

Comme $m_i^2 \geq m_i \geq 1$ on a $\dim C(A) \geq m_1 + \dots + m_n = n$.

Par ailleurs, $K[A] \subset C(A)$ donc il suffit d'avoir égalité des dimensions pour :

- Si $\dim C(A) = n$, on a nécessairement $m_i^2 = m_i \quad \forall i$ donc $m_i = 1$ et donc $n = m$. Donc $\dim K[A] = n = m = \dim C(A)$. Donc $K[A] = C(A)$.
- Si $\dim K[A] = n$ i.e $n = m$, comme la somme $m_1 + \dots + m_n = m$, on a $m_i = 1 \quad \forall i$ donc $\dim C(A) = m_1^2 + \dots + m_n^2 = m = \dim K[A]$. Donc $C(A) = K[A]$.
- Si $C(A) = K[A]$. On a $\dim K[A] = n \leq m = m_1 + \dots + m_n \leq m_1^2 + \dots + m_n^2 = \dim C(A)$. Comme $\dim C(A) = \dim K[A]$ on a égalité partout donc $n = m$ et $\dim C(A) = \dim K[A] = n$.

Bref dans le cas où A est diagonalisable,

$$C(A) = K[A] \iff n = m \iff \dim C(A) = n \iff \dim K[A] = n.$$