Théorème de Weierstrass

Théorème : Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n-ème polynôme de Bernstein B_n par $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, avec $x \in [0,1]$. La suite de polynômes (B_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Démonstration : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Pour tout $x \in [0,1]$, on fixe une suite $(X_k^{(x)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre x. On pose ensuite $S_n^{(x)} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{(x)}$.

On commence par remarquer que
$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n^{(x)}}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}[S_n^{(x)} = k]$$
$$= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$
$$= B_n(x)$$

car la variable aléatoire $S_n^{(x)}$ suit une loi binomiale de paramètre (n,x).

Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\delta(\varepsilon) = \sup\{|f(x) - f(y)|,\ x,y \in [0,1] \text{ et } |x-y| \leq \varepsilon\}$.
La fonction f étant continue sur le compact $[0,1]$, elle est, par théorème de Heine, uniformément continue (sur $[0,1]$). Ceci donne $\delta(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$.

Soit à présent $x \in [0,1]$. On a :

$$|B_n(x) - f(x)| = \left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n^{(x)}}{n}\right)\right] - f(x)\right|$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n^{(x)}}{n} - x\right| \leq \varepsilon\right\}} \left|f\left(\frac{S_n^{(x)}}{n}\right) - f(x)\right|\right]$$
$$+ \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n^{(x)}}{n} - x\right| > \varepsilon\right\}} \left|f\left(\frac{S_n^{(x)}}{n}\right) - f(x)\right|\right]$$

donc $|B_n(x) - f(x)| \leqslant \delta(\varepsilon) + 2\|f\|_\infty \, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n^{(x)}}{n} - x\right| > \varepsilon\right)$.

Cependant, par inégalité de Tchebichev, on a $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n^{(x)}}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n^{(x)}}{n}\right)\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \mathrm{Var}\left(\frac{S_n^{(x)}}{n}\right)$.

De plus, $\mathbb{E}\left(\frac{S_n^{(x)}}{n}\right) = x$, et $\mathrm{Var}\left(\frac{S_n^{(x)}}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \mathrm{Var}\left(S_n^{(x)}\right)$

$$= \frac{1}{n} \mathrm{Var}\left(X_1^{(x)}\right)$$

$$= \frac{x(1-x)}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Donc $|B_n(x) - f(x)| \leqslant \delta(\varepsilon) + \frac{2\|f\|_\infty}{n\varepsilon^2}$.

On a alors $\|B_n - f\|_\infty \leqslant \delta(\varepsilon) + \frac{2\|f\|_\infty}{n\varepsilon^2}$. Soit $\eta > 0$.

On commence par fixer $\varepsilon > 0$ tel que $\delta(\varepsilon) < \eta$. On fixe ensuite $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\frac{2\|f\|_\infty}{n\varepsilon^2} < \eta$.

Pour tout $n \geqslant N$, on a donc $\|B_n - f\|_\infty < 2\eta$, ce qui achève la preuve.