

Nombre de partitions d'un entier à parts fixées: Annexe p. 340
Gordon ana p. 260 152-
126-144-190-223-243

Sont $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble.

(3.02)

$n \in \mathbb{N}$, on note S_n le nombre de solutions $(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation diophantienne $\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p = n$

Alors : $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\prod_{i=1}^p \alpha_i} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$

Démonstration: Considérons la série entière définie par le produit des séries entières $\sum_{n_i \in \mathbb{N}} z^{\alpha_i n_i}$; $i \in \{1, \dots, p\}$ (de rayon de convergence $R=1$) (1)

Le coefficient de z^n dans le produit est le nombre de manières de combiner les puissances de z de chaque terme du produit pour que leur somme fasse n (2). Autrement dit :

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n = \prod_{i=1}^p \sum_{n_i=0}^{\infty} z^{\alpha_i n_i} = \frac{1}{1-z^{\alpha_1}} \times \dots \times \frac{1}{1-z^{\alpha_p}} \quad (*)$$

$F(z)$ est une fraction rationnelle dont les pôles sont les racines α_i ièmes de l'unité $\alpha_i \in \{1, \dots, p\}$

De plus, le pôle $z=1$ est le seul de multiplicité p (qui est le maximum possible).

En effet : soit w un pôle de F , de multiplicité p

Alors w est une racine de l'unité : $w = e^{2\pi i a/b}$ avec $a, b=1$

et $w^{\alpha_1} = \dots = w^{\alpha_p} = 1$ donc $b \mid \alpha_1, \dots, \alpha_p$ donc $b \mid \alpha_1, \dots, \alpha_p$

d'après le théorème de Gauss. Donc $b=1$ car $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Donc $w=1$.

Écrivons la décomposition en éléments simples de F ; les pôles étant 1 (de multiplicité p) et les autres sont les éléments de

$U_{\alpha_i} \setminus \{z\}$, $i \in \{2 \dots p\}$ de multiplicité $< p$.

$$\text{donc } f(z) = \frac{A}{(1-z)^p} + \sum_{w \in T} \frac{a_{1,w}}{w-z} + \dots + \frac{a_{p-1,w}}{(w-z)^{p-1}} \quad (\text{**}) \quad \text{où } w \text{ est un des}$$

racines p-èmes de l'unité et $\alpha_i, w \in \mathbb{C}$

$$\text{On détermine } A: \quad \underbrace{(1-z)^p f(z)}_{\substack{\downarrow z \rightarrow 1 \\ A \\ \text{par (**)}}} = \frac{1-z}{1-z^{\alpha_1}} \times \dots \times \frac{1-z}{1-z^{\alpha_p}} \quad \text{par (**)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1-z^{\alpha_1}}{1-z} \times \dots \times \frac{1-z^{\alpha_p}}{1-z}} = \frac{1}{(1+\dots+z^{\alpha_1-1}) \times \dots \times (1+\dots+z^{\alpha_p-1})}$$

$$\text{de plus: } \frac{1}{(w-z)^k} = \frac{1}{w^k} \frac{1}{(1-\frac{z}{w})^k} \quad \downarrow z \rightarrow 1 \quad \frac{1}{w^k} \quad \text{donc } A = \frac{1}{w^k}$$

$$\text{or } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{donc par dérivation k-1 fois:}$$

$$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \frac{1}{1-x} = \frac{(k-1)!}{(1-x)^k} = \sum_{n=k-1}^{\infty} n \dots (n-k+1) x^{n-k+1}$$

$$\text{donc } \frac{1}{(1-x)^k} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+k-1) \times \dots \times (n-1) x^n = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!} x^n$$

$$\text{Finalement: } \frac{1}{(w-z)^k} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!} w^{-n-k} z^n$$

donc si $|w|=1$, le coefficient de z^n dans cette série entière est $O(n^{k-1})$

donc par (**) le coefficient de z^n dans la série entière $G(z)$ est $O(n^{p-2})$

$$\text{le coefficient de } z^n \text{ dans } \frac{A}{(1-z)^p} \text{ est } \frac{A}{(p-1)!} \frac{(n+p-1)!}{n!}$$

$$\text{donc } S_n = \frac{A}{(p-1)!} \frac{(n+p-1)!}{n!} + O(n^{p-2})$$

$$= \frac{1}{(p-1)! \cdot w^k} (n+p-1) \times \dots \times (n+1) + O(n^{p-2}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{w^k} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$$

$$\textcircled{1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p \sum_{n_i \geq 0} X^{\alpha_i n_i} = \sum_{n \geq 0} \sum_{\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p = n} X^{\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p}$$

fullmann

$$= \sum_{n \geq 0} \sum_{\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p = n} X^n = \sum_{n \geq 0} \delta_n X^n$$

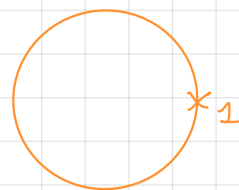
$$\textcircled{2} \frac{(n+h-1) \times \dots \times (n+1)}{n! \times n^{h-1}} \sim \frac{n^{h-1}}{n! \times n^{h-1}} = \frac{1}{n!}$$

donc $\frac{(n+h-1) \times \dots \times (n+1)}{n!} = O(n^{h-1})$

Application: Calculer le nombre de solutions entières de

$$5a + 3b + 2c = 10000$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^n = \frac{1}{(1-z^5)(1-z^3)(1-z^2)}$$



les poles sont : 1, $e^{2i\pi/5}$, $e^{4i\pi/5}$, $e^{6i\pi/5}$, $e^{8i\pi/5}$, $e^{2i\pi/3}$, $e^{4i\pi/3}$, $e^{2i\pi/2}$, $e^{4i\pi/2}$, $e^{6i\pi/2}$, $e^{8i\pi/2}$

$$F(z) = \frac{A}{(z-1)^3} + \frac{a_1, w_5}{(z-w_5)} + \frac{a_2, w_5}{(z-w_5)^2} + \frac{a_3, w_5^2}{(z-w_5^2)} + \frac{a_4, w_5^2}{(z-w_5^2)^2} + \frac{a_5, w_5^3}{(z-w_5^3)} + \frac{a_6, w_5^3}{(z-w_5^3)^2} + \frac{a_7, w_5^4}{(z-w_5^4)} + \frac{a_8, w_5^4}{(z-w_5^4)^2} + \frac{a_9, w_3}{(z-w_3)} + \frac{a_{10}, w_3}{(z-w_3)^2} + \frac{a_{11}, w_3^2}{(z-w_3^2)} + \frac{a_{12}, w_3^2}{(z-w_3^2)^2} + \frac{a_{13}, w_2}{(z-w_2)} + \frac{a_{14}, w_2}{(z-w_2)^2}$$

$$(z-w_5) F(z) \Big|_{z=w_5} = \frac{1}{(w_5-1)^3 (w_5-w_5^2) (w_5-w_5^3) (w_5-w_5^4) (w_5-w_3) \times (w_5-w_2) \times (w_5-w_2)}$$

$$\frac{1}{(z-1)^3} = \frac{1}{2!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3-1) \times \dots \times (n+1)}{n!} z^n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{n!} z^n$$

donc le coefficient de z^n est $\frac{1}{2} \frac{(n+2)(n+1)}{n!}$

$$\frac{a_{2,w_5}}{w_5 - z} = \frac{1}{w_5} a_{1,w_5} \times \frac{1}{1 - \frac{z}{w_5}} = \frac{a_{2,w_5}}{w_5} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{w_5}\right)^n$$

donc le coeff de z^n est $\frac{a_{2,w_5}}{w_5^{n+1}}$