

valeur de l'intégrale de Dirichlet:

Semi-CV: Gerdlingen p. 30
Méthode 1: 212
Méthode 2: Bonis p. 260

234 - 235 - 236
- 239 - 245

12.36

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration:

1) l'intégrale est semi-convergente.

a) $f: x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$

donc $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge. fini lorsque $A \rightarrow +\infty$

Soit $A > 1$, $\int_1^A \frac{\sin(x)}{x} dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x} \right]_1^A + \int_1^A \frac{\cos(x)}{x^2} dx$

• $\frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x \geq 1$

• $\frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \geq 1$

• $x \mapsto \frac{1}{x^2} \in L^1([1, +\infty[)$

donc $\int_1^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ converge par le théorème de convergence dominée. ①

Enfin, l'intégrale est bien définie.

b) $\int_0^{N\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx$

Or $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx = \int_0^\pi \frac{|\sin(x)|}{x+k\pi} dx \geq \int_0^\pi \frac{|\sin(x)|}{x+k\pi} dx = \frac{2}{(k+1)\pi}$

= $\sin(x)$ sur $(0, \pi)$ + intégrat²

Or $\sum \frac{2}{(k+1)\pi}$ diverge par comparaison avec l'intégrale ; donc $\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x} dx$ diverge. ②

2) Méthode 1 pour la valeur: Soient $A > 0$, $f:]0, A[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto e^{-xy} \sin(x)$

Alors $f \in L^1([0, A[\times]0, +\infty[)$. En effet:

Il en résulte: $\int_{]0, A[} \int_{]0, +\infty[} e^{-xy} dy = \left[-\frac{1}{x} e^{-xy} \right]_0^{+\infty} \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$

3) autre part, par le théorème de Fubini - Tonelli:

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} |f(x,y)| dx dy = \int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-xy} dy \right) |f(x)| dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|f(x)|}{x} dx < +\infty$$

On peut appliquer le théorème de Fubini: $\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{f(x)}{x} dx$

On peut écrire f comme: $f(x,y) = e^{-xy}$ $h(x) = e^{-xy} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)$

$$= \frac{1}{2i} \left(e^{x(i-y)} - e^{x(-i-y)} \right)$$

On a alors: $\int_{\mathbb{R}^+} e^{-xy} h(x) dx = \frac{1 - e^{-yA} (\cos(A) - y \sin(A))}{1+y^2}$

donc $\int_{\mathbb{R}^+} \frac{h(x)}{x} dx = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1 - e^{-yA} (\cos(A) - y \sin(A))}{1+y^2} dy$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{1+y^2} dy - \int_{\mathbb{R}^+} \frac{e^{-yA} (\cos(A) + y \sin(A))}{1+y^2} dy$$

$$= \left[\text{Arctan}(y) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

• $\frac{e^{-yA} (\cos(A) + y \sin(A))}{1+y^2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$

• $\frac{e^{-yA} (\cos(A) + y \sin(A))}{1+y^2} \leq e^{-y} \frac{1+y}{1+y^2}$ $\int_0^{+\infty} 1 \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{y^2} \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$

• $1 > 0$ et $\frac{1}{y^2} \geq 0$ $\Rightarrow$ donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{e^{-yA} (\cos(A) + y \sin(A))}{1+y^2} dy = 0$

donc par le théorème de convergence dominée: $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{h(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

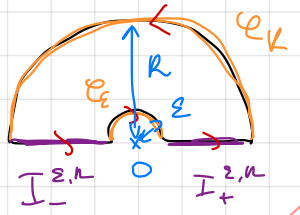
2) calcul de l'intégrale.

Soient $0 < \varepsilon < R$.

$$\int_{\varepsilon}^R \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} dt = \frac{1}{2i} \left(\int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t} dt \right) \quad (*)$$

Donons $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$; f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ④

Soit $\Gamma_{\varepsilon, R} = \mathcal{C}_\varepsilon \cup I_+^{\varepsilon, R} \cup \mathcal{C}_R \cup I_-^{\varepsilon, R}$ le bord $\mathcal{C}'$ par morceaux orienté positivement tel que :



$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ouvert simplement connexe
 $\uparrow$ analyser $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
 $\Gamma_{\varepsilon, R}$ bord de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Par la formule de Cauchy : $\forall 0 < \varepsilon < R$: ⑤

$$\int_{I_-^{\varepsilon, R}} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}_\varepsilon} f(z) dz + \int_{I_+^{\varepsilon, R}} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz = \int_{\Gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz = 0$$

Car f n'admet pas de pôle dans le bout $\Gamma_{\varepsilon, R}$.

D'une part : $\left| \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz \right| = \left| \int_0^\pi f(Re^{it}) \times R i e^{it} dt \right|$

paramétrisation de $\mathcal{C}_R$ par $\gamma(t) = Re^{it}$
 pour $t \in [0, \pi]$

$$= \int_0^\pi f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

$$= \left| \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} \times R i e^{it} dt \right|$$

$$\leq \int_0^\pi |e^{iRe^{it}}| dt = \int_0^\pi |e^{ik(\cos t + i \sin t)}| dt$$

$$= \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt$$

- $e^{-R \sin t} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$

- $e^{-R \sin t} \leq 1 \in L^1([0, \pi])$

- $1 \geq 0$ ↑ indep de R !!

Donc par théorème de convergence dominée : $\int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$

D'autre part : $\int_{\mathcal{C}_\varepsilon} f(z) dz = \int_\pi^0 f(\varepsilon e^{it}) i \varepsilon e^{it} dt$

$$= - \int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{it}}}{\varepsilon e^{it}} i \varepsilon e^{it} dt$$

$$= -i \int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{it}} dt$$

- $e^{i\varepsilon e^{it}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1$
- $|e^{i\varepsilon e^{it}}| \leq 1 \in L^1([0, \pi])$
- $\gamma > 0$ $\uparrow$ dominer le module

donc $\int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -i \int_0^\pi 1 dt = -i\pi$

donc par (*): $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \frac{1}{2i} \left(\int_{\Gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz + \int_{\Gamma_{\varepsilon, R}^+} f(z) dz \right)$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \frac{1}{2i} \left(- \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz \right)$$

$$= \frac{1}{2i} (-0 + i\pi) = \frac{\pi}{2} \quad \square$$

① Caradepage p. 37 Théorème de convergence dominée: Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur A un ensemble mesurable / $f_n \rightarrow f$ simplement sur A et / $\exists g$ intégrable / $|f_n| \leq g$ sur A .

Alors $f \in L^1$ et $\int_A f d\mu = \lim_n \int_A f_n d\mu$

② Caradepage p. 26 Soient $a \in \mathbb{N}$, f continue, positif, décroissante sur $\mathbb{Q}_+$ et.

Alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et de même nature que $\sum_{n=a}^{+\infty} f(n)$

ici: $f(x) = \frac{1}{x}$ est C^0 , $\downarrow$, pas sur $\mathbb{Z}_+$, et

et $\int_1^\infty \frac{1}{t} dt$ DV par Riemann, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ DV

③ Caradepage p. 209 Théorème de Tonelli: Soit f mes pos sur $M \times N$, on a:

$$\int_M \left(\int_N f(m, n) d\mu_N \right) d\mu_M = \int_N \left(\int_M f(m, n) d\mu_M \right) d\mu_N \in \mathbb{R}_+$$

④ Caradepage p. 85 Fonction analytique: Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$

on dit que f est anal sur U si f est localement la somme d'une série entière.

ie: si $\forall z_0 \in U$, $\exists (a_n)_n$ et $D(z_0, r) \subset U$ / $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0, r)$

ici: $\frac{e^{iz}}{z} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(iz)^k}{k!} \times \frac{1}{z} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{i^k}{k!} z^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1^{k+1}}{(k+1)!} z^k$

⑤ Carathéodory p. 105

Ouvet simplement connexe: U et SC n'ont rien de

U est homotope dans U à un point de U i.e. à un bout continu $t \mapsto z$ où

$z \in U$. Ex:



SC



Nb SC.

↙ chemins ou bouts

Voici K_1 tout homotope dans U si les bout def sur $[a, b]$, de n extrémités et

si il existe une famille de chemins (ou bouts) ayant n ext que K_1 qui def

C^1 de $s \in [0, 1]$ au n où $\alpha : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$ est continue
 $(t, s) \mapsto \gamma_s(t)$

Convergence: si f est anal sur un ouvet simplement connexe U , alors pour

tout bout γ de U , $\int_\gamma f(z) dz = 0$