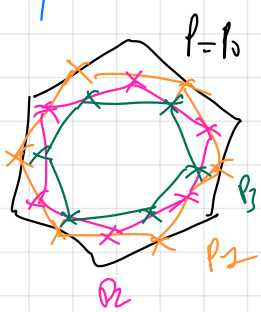
## Suite de polygones. Gourdon p. 388 149 - 152 - 181 - 191 - 226 12.05

Soit $P$ un polygone du plan complexe de sommets $\{z_1, \dots, z_n\}$. On définit par récurrence une suite de polygones $(P_k)_{k\geq 0}$ telle que :

$\begin{cases} P_0 = P \\ \text{les sommets de } P_{k+1} \text{ sont les milieux des arêtes de } P_k. \end{cases}$




Alors $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de $P$. ①

**Lemme :** Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Alors : $\begin{vmatrix} a_0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}$

**Démonstration :** Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$ alors $C = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$

Il reste à diagonaliser $J$ pour diagonaliser $C$ :

Soit $X \neq 0$ : $JX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \end{cases}$

$\iff \forall i,\ x_i = \lambda^{i-1} x_1$ ②

$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$ ; $e_k = (1, \omega^k, \dots, \omega^{(n-1)k})$ est vecteur propre de $J$ associé à la valeur propre $\omega^k$. Donc $J$ possède $n$ valeurs propres distinctes donc est diagonalisable.

En effet : $\omega^k e_k = (\omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{nk}) = (\omega^k, \omega^{2k}, \dots, 1) = J e_k$

$\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ / $J = P^{-1} D P$ où $D = \mathrm{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$ d'où :

$$\det(C) = \det\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right) = \det\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k P^{-1} D^k P\right) = \det\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k\right)$$

$$= \det\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{diag}(a_k, a_k \omega^k, \dots, a_k \omega^{(n-1)k})\right) = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}. \quad \square$$

**Démonstration :** On représente $P_k$ par $Z_k = \begin{pmatrix} z_1^k \\ \vdots \\ z_n^k \end{pmatrix}$. Montrons que $Z_k \to \begin{pmatrix} g \\ \vdots \\ g \end{pmatrix}$ où $g$ est l'isobarycentre de $P$.

$z_{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{z_1^k + z_2^k}{2} \\ \vdots \\ \frac{z_n^k + z_1^k}{2} \end{pmatrix} = A z_k$ avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & & & \end{pmatrix}$

Donc $z_k = A^k z_0$ $k \in \mathbb{N}$. Il suffit de montrer que $(A^k)_k$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$\chi_A(X) = \det(A - XI_n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - X & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & & & \frac{1}{2} - X \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}$

$= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \left( \frac{1}{2} - X \right) + \frac{1}{2}\omega^j \right]$ ($a_0 \omega^{jx_0}$, $a_1 \omega^{jx_1}$)

$= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\omega^j \right) - X \right]$

$\lambda_j$

Et $\lambda_j \neq \lambda_i$ (1) $\Leftrightarrow i \neq j$ donc $\chi_A$ est scindé à racines simples donc $A$ est diagonalisable : $\exists Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ / $A = Q^{-1} D Q$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1})$

Pour $j \neq 0$, $|\lambda_j| = \left| \frac{1 + \omega^j}{2} \right| = \left| \frac{1 + e^{2i\pi j/n}}{2} \right| = \left| \frac{e^{i\pi j/n}}{2} \left( e^{-i\pi j/n} + e^{i\pi j/n} \right) \right|$

$= \left| e^{i\pi j/n} \cos(\pi j/n) \right| < 1$

Donc $|\lambda_j|^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ si $j > 0$ d'où $A^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} B = Q^{-1} \mathrm{diag}(1, 0, \ldots, 0) Q$

$\lambda_0 = 1$

par continuité de $\Pi \mapsto Q^{-1} \Pi Q$

Donc $z_k = A^k z_0 \to B z_0 =: X$. Par continuité de la multiplication à gauche et du passage à la limite : $A z_k \to AX$ donc $AX = X$

$\| \quad A^{k+1} z_0 \to X$

Si l'espace propre associé à 1 contient $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et est de dimension 1 ou $\chi_A$ possède $n$ racines distinctes. Donc $\exists a \in \mathbb{C}$ / $X = (a, \ldots, a)$ donc $P_k$ converge vers le point d'affixe $a$. Montrons que $a = g$.

On sait si $g$ est l'isobarycentre de $P_0$, alors c'est celui de $P_k$. En effet :

on note $g$ l'isobarycentre de $P_k$, et en considérant les indices modulo $n$ :

$$g_{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^{k+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^k + z_{i+1}^k}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^k = g_k$$

Or $z_k \to (a, \dots, a)$ et par continuité de la fct qui à un polygone associe son isobarycentre :

$g_k \to \text{iso}(a, \dots, a) = a$. Comme $g_k = g$ $\forall k$, alors $g = a$ ∎

$\| \text{iso}(P_k)$

① Isobarycentre $(b_1, \dots, b_n)$ = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$ (affixes)

② $\lambda_i = \lambda_j \iff \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\omega^i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\omega^j$

$\iff \omega^i = \omega^j \iff \omega^{i-j} = 1 \iff i - j = 0$ $(\text{car } i, j \in \{0, \dots, n-1\})$