

Translater d'une fonction: Fraumou 1 alg p. 300 151-159-221-228 (13.15)

$\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \text{ derivables} \mid f_a: x \mapsto f(x+a), a \in \mathbb{N} \text{ engendrent un ker de } \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$
noté F , de dimension finie $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \text{ solution d'une équation linéaire}$
homogène à coefficients constants (d'ordre fini)}.

Lemme: Soient $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$. Alors $(f_1, \dots, f_n)$ libre $\Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N} /$
 $(f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{GL}(\mathbb{N})$.

Démonstration: $\Leftarrow$ Par la contraposée: si $(f_1, \dots, f_n)$ est liée alors $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$,
les colonnes de $(f_i(a_j))$ sont liées donc $(f_i(a_j)) \notin \text{GL}(\mathbb{N})$

$\Rightarrow$ On suppose que $B = (f_1, \dots, f_n)$ est libre. On note $F = \text{Vect}(B)$ qui est de dim n .

Alors $\forall a \in \mathbb{N}$, $e_a: F \rightarrow \mathbb{N} \in \mathcal{L}(F, \mathbb{N}) = F^*$
 $f \mapsto f(a)$

$A = \{e_a, a \in \mathbb{N}\}$ est une partie génératrice de F^*

En effet: si $f \in A^\perp = \{f \in F^* \mid \langle f, a \rangle = 0, \forall a \in \mathbb{N}\}$ alors $f = 0$

Donc $A^\perp = \{0\}$ $\langle e_a, f \rangle$

Et $\text{Vect}(A) = (\text{Vect}(A)^\perp)^\perp \stackrel{A}{=} (A^\perp)^\perp = 0^\perp = F^*$ car on est en dimension finie.

Comme $\dim(F^*) = n$, $\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N} / (e_{a_1}, \dots, e_{a_n})$ est une base de F^* , et montrons
que $(a_1, \dots, a_n)$ répond à la question.

Soit $\pi = (f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n}$. Montrons que les lignes $l_1, \dots, l_n$ de π forment une
famille libre. $\left(\begin{smallmatrix} f_1(a_j) \\ \vdots \\ f_n(a_j) \end{smallmatrix} \right) \swarrow \sum_{i=1}^n l_i f_i(a_j) = 0$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N} / \lambda_1 l_1 + \dots + \lambda_n l_n = 0$. Alors $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(a_j) = 0$

ie: $e_{a_j} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right) = 0$. Comme $(e_{a_1}, \dots, e_{a_n})$ est une base de F^* , alors

$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \in (F^*)^\perp = \{0\}$. Comme $(f_1, \dots, f_n)$ est libre (par hyp), on a donc

$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Donc $\pi \in \text{GL}(\mathbb{N})$ $\blacksquare$

Démonstration: $\Rightarrow$ Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N} / (f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ soit une base de F

Par le lemme: $\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N} / \pi = (f_{a_i}(a_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{GL}(\mathbb{N})$

Comme f est dérivable, f_i l'est aussi. Donc tout élément de F

est dérivable.

Soit $g \in F$, montrons que $g' \in F$.

$\forall a \in \mathbb{R}$, $g_a \in F$ car $g_a \in \text{Vect}(f_{a+a}, \dots, f_{a+n+a}) \subset F$

Donc $\exists \lambda_1(a), \dots, \lambda_n(a) \in \mathbb{R} \mid g_a = \sum_{i=1}^n \lambda_i(a) f_{ai}$. Montrons que les λ_i sont dérivables: $\forall 1 \leq j \leq n$, $g(a+x_j) = g_a(x_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(a) f_{ai}(x_j)$

Naturellement:
$$\begin{pmatrix} g(a+x_1) \\ \vdots \\ g(a+x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix} \stackrel{\text{index de } a}{=} \begin{pmatrix} g(a+x_1) \\ \vdots \\ g(a+x_n) \end{pmatrix}$$

Donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont combinaison linéaire de $g_{a_1}, \dots, g_{a_n}$ qui sont dérivables.

Donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont dérivables.

Et $\forall a \in \mathbb{R}$, $g'(n+a) = \sum_{i=1}^n \lambda'_i(a) f_{ai}(n) \Rightarrow g'(n+a) = \sum_{i=1}^n \lambda'_i(a) f_{ai}(n)$

Donc pour $a=0$, $g' = \sum_{i=1}^n \lambda'_i(0) f_{ai} \in F$

Donc $\forall g \in F$, g est C^∞ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)} \in F$.

Ceci est donc vrai pour f . Or $\dim(F) = n$ donc $f^{(n)} \in \text{Vect}(f, \dots, f^{(n-1)})$

Donc f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

③ $\forall a \in \mathbb{R}$, f_a est aussi solution de cette ED^{d'ordre p}. Comme l'ensemble de solutions de cette équation est un espace vectoriel de dimension p , alors les f_a engendrent un espace vectoriel de dimension inférieur ou égale à p . $\square$