

Soit $f \in C^1([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Montrons $\forall f$ l'existence des éléments $u \in C^0([0, \pi] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tels que :

1) i) $\partial_x u, \partial_t u, \partial_{xx}^2 u$ existent et sont continues sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$

ii) $\forall t \geq 0, u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ condition aux bords

iii) $\forall (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*, \partial_t u(x, t) = \partial_{xx}^2 u(x, t)$ équation de la chaleur

2) $\forall x \in [0, \pi], u(x, 0) = f(x)$ condition initiale

Alors $\forall f$ on a un unique.

Démonstration: $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on note $u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n(x) e^{-n^2 t}$ ← vérifie 1) iii)

Soit $\tilde{f}$ le prolongement impair, 2π -périodique de f .

Comme $f(0) = f(\pi) = 0$, alors $\tilde{f}$ est continue et C^1 par morceaux (et même C^1)

la série $\sum_{n \geq 2} b_n(\tilde{f}) u_n$ converge normalement donc simplement sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+$

En effet: $\tilde{f} \in C^0 \cap C^1$ donc $(b_n(\tilde{f}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée. Or, $\forall n \geq 1$,

$$\|b_n(\tilde{f}) u_n\|_\infty \leq |b_n(\tilde{f})|$$

En notant S la somme de la série $\sum b_n(\tilde{f}) u_n$, par convergence uniforme, et continuité de u_n , on a que S est continue sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+$. De plus:

•) $\forall t \geq 0, S(0, t) = S(\pi, t) = 0$ donc S vérifie 1) iii)

•) Montrons que $\partial_t S$ est continue. Soit $\varepsilon > 0, \forall x \in [0, \pi]$,

$\forall t \geq \varepsilon, \forall n \geq 1, u_n(x, t)$ est C^1 et :

$$|\partial_t (b_n(\tilde{f}) u_n)(x, t)| \underset{(*)}{\leq} |b_n(\tilde{f})| n^2 e^{-n^2 \varepsilon} = O(|b_n(\tilde{f})|) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$$

Comme $\sum |b_n(\tilde{f})|$ converge, $\sum b_n(\tilde{f}) \partial_t u_n(x, t)$ converge normalement sur $[\varepsilon, \infty[\times \forall x \in [0, \pi]$.

Ceci, $\forall \varepsilon > 0$, donc S est dérivable selon t sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+^*$ et on obtient

$\partial_t S$ en donnant terme à terme.

De plus, $\forall n, \ln(f) \partial_t u$ est continue sur $(0, \pi) \times \mathbb{R}_+^*$ et la majoration $|u|$ étant aussi indépendante de x , on a convergence normale sur $(0, \pi) \times [0, \infty[$ de $\sum \ln(f) \partial_t u$.

Pour $\partial_t S$ est continue sur $(0, \pi) \times \mathbb{R}_+^*$.

On aurait fait de même pour $\partial_x S$ et $\partial_{xx}^2 S$. Donc S vérifie 1)(i)

•) Par linéarité de l'équation de la chaleur, S vérifie 1)(iii)
↳ on va la vérifier

•) $\forall x \in (0, \pi), S(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(f) \sin(nx)$ est la somme de la série de Fourier de f . Comme $f \in C^0 \cap C^1$, le théorème de convergence normale assure que $\forall x \in (0, \pi), S(x, 0) = f(x)$. Donc S vérifie 2). 3

* Montrons que S est la seule solution.

Soient $u_1, u_2 \in K_f$. Posons $u = u_1 - u_2$

Alors $u \in K_0$ par linéarité de 1)(iii)

Soit $K(t) = \int_0^\pi u^2(x, t) dx \quad \forall t \geq 0$

Comme $u \in C^0, \partial_t u \in C^0$ alors $K \in C^1$ et $\forall t \geq 0,$

$$K'(t) = \int_0^\pi 2 \partial_t u(x, t) u(x, t) dx = \int_0^\pi 2 \partial_{xx}^2 u(x, t) u(x, t) dx \quad \text{par 1)(iii)}$$

Par intégration par parties et par 1)(ii):

$$\begin{aligned} K'(t) &= \left[2 u(x, t) \partial_x u(x, t) \right]_{x=0}^{x=\pi} - 2 \int_0^\pi (\partial_x u(x, t))^2 dx \\ &= -2 \int_0^\pi (\partial_x u(x, t))^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

Donc K est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$, $K(0) = \int_0^\pi u^2(x, 0) dx$

$$= \int_0^\pi (u_1 - u_2)^2(x, 0) dx = \int_0^\pi \underbrace{(u_1(x, 0) - u_2(x, 0))^2}_{\geq 0} dx = 0$$

*donc $K(t) = 0 \quad \forall t$
donc $u^2 = 0$ car $u \in C^0$*

① Méthode de séparation de variables. Soit $u \neq 0$ de la forme $\underbrace{\quad}_{\in C^0}$

$u: (n, t) \mapsto X(n|T(t))$ où $X \in C^2(\omega, \pi], \mathbb{N}]$, $T \in C^1(\mathbb{N}_+, \mathbb{N}]$

Alors u est continue et vérifie i)(i)

Supposons qu'elle vérifie i)(ii) - (iii)

Par i)(ii): $\forall (n, t) \in (\omega, \pi) \times \mathbb{N}_+^*$, $X(n|T'(t)) = X^q(n|T(t))$

Or $u \not\equiv 0$ donc $\exists (n_0, t_0) \in]\omega, \pi[\times \mathbb{N}_+ / u(n_0, t_0) \neq 0$

Par ci de u , on a $t_0 > 0$

En particulier: $X(n_0) \neq 0$ et $T'(t_0) \neq 0$

Donc $t_n \in (\omega, \pi)$, $X^q(n) = \frac{T'(t_0)}{T(t_0)}$ et $t > 0$, $T'(t) = \frac{X''(n_0) + t}{X(n_0)}$ (***)

Pour $h = -\frac{T'(t_0)}{T(t_0)}$ alors pour $t = t_0$ dans (**): $h = -\frac{X''(n_0)}{X(n_0)}$

Donc $\forall (n, t) \in (\omega, \pi) \times \mathbb{N}_+^*$, $X''(n) = -h X(n)$

$T'(t) = -h T(t)$ (****)

Supposons $h < 0$ alors $\exists A, B \neq 0 / X(n) = A e^{\sqrt{-h} n} + B e^{-\sqrt{-h} n}$

Et par i)(ii) + $t = t_0$: $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-h} \pi} & e^{-\sqrt{-h} \pi} \end{pmatrix} \in \ker(\mathbb{N})$ absurde

Donc $h \geq 0$.

Si $h = 0$ alors X est affine non nulle (cont) avec i)(ii)

Donc $h > 0$ et $\exists A, B \neq 0 / X(n) = A \cosh(\sqrt{h} n) + B \sinh(\sqrt{h} n)$

Par i)(ii): $A = 0$, $\sinh(\sqrt{h} \pi) = 0$ donc $\exists n \in \mathbb{N}_+^* / \sqrt{h} = n$ et

$X(n) = B \sinh(n)$ donc par (****), $\exists C \neq 0$, $\exists n \in \mathbb{N}_+^* /$

$u(n, t) = C \sinh(n) e^{-n^2 t} \quad \forall (n, t) \in (\omega, \pi) \times \mathbb{N}_+$

③② Gardon p. 22 Si $f \in C^0 \cap C^1_{\text{pm}}$ alors $\sum_n |f(n)|$ CVN vers f

Soit $\psi(t) = |f'(t)|$ si f est Δ ent

$\frac{|f'(t) + f'(t-1)|}{2}$ sinon

$$\text{Alors } cn(\varphi) = \frac{1}{n} cn(\varphi) \quad \swarrow \quad |ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

$$\text{Ainsi, } |cn(\varphi)| = \left| \frac{cn(\varphi)}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(|cn(\varphi)|^2 + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\text{Et } \sum |cn(\varphi)|^2 \text{ CV par Riemann donc } \sum |cn(\varphi)| \text{ CV}$$

$$\text{Et } |cn(\varphi)en| = |cn(\varphi) e^{in\pi}| = |cn(\varphi)| \text{ donc } \sum |cn(\varphi)en| \text{ CV.}$$