

Soit $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$. Alors:

$$1) \forall t \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{2ik\pi t}$$

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{-2ik\pi \xi} d\xi$$

2) Si de plus support $(\hat{f}) \subset [-F, F]$ où $0 < F \leq 1$ alors $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \frac{\sin((n-t)\pi)}{(n-t)\pi}$$

Démonstration: 1) (i) Montrons que les sries $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f^{(i)}(n+t)$ $i=0,1$ convergent normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.

$$f \in \mathcal{G}(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists \eta_0, \eta_1 > 0 \mid \forall t \in \mathbb{R}, |f^{(i)}(t)| \leq \frac{\eta_i}{1+t^2}, i=0,1$$

Soient K un compact de $\mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$ / $K \subset [-N, N] \Rightarrow |n| - N \leq |n| - |t| \leq |n| + |t|$

$$\text{Alors, } \forall t \in K, \forall |n| \geq N+1, |f^{(i)}(t+n)| \leq \frac{\eta_i}{1+(t+n)^2} \leq \frac{\eta_i}{(t+n)^2} \leq \frac{\eta_i}{(|n|-N)^2}, i=0,1$$

Or $\sum_{|n| \geq N+1} \frac{1}{(|n|-N)^2}$ converge, donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f^{(i)}(n+t)$ converge normalement sur K , $i=0,1$

On note $g: t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n+t)$; g est 1-périodique

(ii) Montrons qu'on peut développer g en série de Fourier. Il suffit de montrer que $g \in C^1(\mathbb{R})$ car $C^1(\mathbb{R}) \subset L^1_T(\mathbb{R})$ et les coeff sont des paires les fct de $L^1_T(\mathbb{R})$

* $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n+t) \in C^1(\mathbb{R})$ car $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$

* $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n+t)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (ou CU sur tout compact de $\mathbb{R}$)

* $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(n+t)$ converge uniformément sur tout compact $\checkmark$ par (i)

donc g est C^1 et on peut calculer ses coefficients de Fourier:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(g) &= \frac{1}{1} \int_{-1/2}^{1/2} g(t) e^{-2in\pi t} dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+t) e^{-2in\pi t} dt \end{aligned}$$

Par convergence uniforme de $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n \cdot \cdot)$ sur $\widehat{[-1/2, 1/2]}$, on peut intégrer terme à terme et intégrer :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \text{ch}(g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-1/2}^{1/2} f(n+t) e^{-2ik\pi t} dt$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, posons le changement de variable affine " $x = n+t$ ".

Par 1-périodicité de $t \mapsto e^{-2ik\pi t}$, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \underbrace{\sum_{n=-N}^N \int_{-1/2}^{1/2} f(n+t) e^{-2ik\pi t} dt}_{\text{ch}(g)} &= \sum_{n=-N}^N \int_{n-1/2}^{n+1/2} f(x) e^{-2ik\pi x} dx \\ &= \underbrace{\int_{-N-1/2}^{N+1/2} f(x) e^{-2ik\pi x} dx}_{\downarrow N \rightarrow +\infty} \\ &\quad \hat{f}(k) \end{aligned}$$

donc $\text{ch}(g) = \hat{f}(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

(iii) Conclusion: Comme g est 1-périodique et C^1 , par le théorème de Dirichlet: $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{ch}(g) e^{2ik\pi t}$ i.e.:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{2ik\pi t} \quad \text{d'où } \text{Spr}(g)^{\dagger} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N \text{ch}(g) e^{2ik\pi t}$$

2) Comme $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$. on peut donc appliquer 1) à $\hat{f}$.
 $\forall \xi \in \mathbb{R}, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k+\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2i\pi n \xi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n) e^{2i\pi n \xi}$

1) formule d'inversion de Fourier (6) par le lemme de Schwartz
 Comme $\hat{f} \notin \mathcal{S}'$, $\forall k \neq 0$, on a: $\hat{f}(k+\xi) = 0$ sur $[-1/2, 1/2]$
 donc $\hat{f} = \mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k \cdot \cdot) = \mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n) e^{2i\pi n \cdot \cdot}$
 " $\hat{f}(0 \cdot \cdot)$ "

Soit $t \in \mathbb{R}$, envoie par la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{G}(\mathbb{R})$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi t \xi} d\xi = \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n) e^{2i\pi n \xi} \times e^{2i\pi t \xi} d\xi$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) e^{2i\pi \xi (t-m)} dm$$

$$d\xi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi \xi (t-m)} d\xi$$

Convergence normale de $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) e^{2i\pi \xi (t-m)}$ sur $[-1/2, 1/2]$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) \frac{\sin((m-t)\pi)}{(m-t)\pi}$$

① $g(t) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f \text{ et ses dérivées tendent à 0 rapidement} \}$

i.e.: leur produit avec n'importe quel polynôme est borné.

$$\textcircled{2} \hat{f}(h) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi h t} dt$$

③ 2Q p. 70 $T > 0$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -périodique localement intégrable $\Rightarrow$

$$a) \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$b) \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt = \int_0^T f(a+u) du$$

$$\begin{aligned} \text{En effet: } \int_a^{a+T} f(t) dt &= \int_a^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_T^{a+T} f(t) dt \\ &= \int_a^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_0^a \underbrace{f(t+T)}_{=f(t)} dt = \int_0^T f(t) dt \end{aligned}$$

Convention: Gordon p. 269 f T -per: $c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi n \frac{t}{T}} dt$

Comme g est 1-per, $c_n(g) = \int_0^1 g(t) e^{-2i\pi n t} dt = \int_{-1/2}^{-1/2+1} g(t) e^{-2i\pi n t} dt$

$\uparrow$ $\mathbb{Z}$ $a = -1/2$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} g(t) e^{-2i\pi n t} dt$$

④ Gordon p. 271 Théorème de Dirichlet: hyp sup faible.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -per, $C_{pm}^0 \mid h \mapsto \frac{f(h^+) + f(h^-) - f(h^+) - f(h^-)}{h}$ est bornée

$\uparrow$ $C_{pm}^0 + f$ (version Bochner p. 129)

annulation de 0.

$$\text{Alors } S_N(f)(t) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-))$$

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{i n t}$$

Corollaire: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -per, C_{pm}^1 alors $S_N(f)(t) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-))$

En particulier, si $f \in C^0$ alors $S_N(f)(t) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(t) \forall t$.

Théorème: Randon au Boek $\mathcal{M}_p + \text{fct}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodique, C^0 , C^1 périodique alors $(S_N f)_N$ converge vers f donc en particulier

$$|S_N f|_h \rightarrow |f|_h \quad \forall h$$

Rappel: $S_N f = \sum_{n=-N}^N c_n f e^{in \cdot}$ pas de "..."

⑤ Berg p. 168 a) $\mathcal{F}$ applique $\mathcal{Y}(\mathbb{R})$ dans lui-même et $\mathcal{F}^2$ telle que

$$\mathcal{O}_p(\mathcal{F}) \leq C_p \mathcal{O}_{p+1}(\mathcal{F}) \text{ où } \mathcal{O}_p(\mathcal{F}) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq p \\ |\beta| \leq p}} \|x^\alpha \mathcal{F}^\beta f\|_{L^\infty}$$

b) $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{F}^{-1} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^\wedge \overline{\mathcal{F}}$

⑥ Berg p. 164 Inversion de Fourier: $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \mid \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\text{Alors } f = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^\wedge \overline{\mathcal{F}(\hat{f})} \quad (\hat{f} = \mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i x \cdot \xi} dx)$$