

Simplicité de $SO_3(\mathbb{N})$: Fraumou 3 p. 67 103-107-204

Le groupe $SO_3(\mathbb{N})$ de rotations de l'espace euclidien $\mathbb{N}^3$ est simple.

Démonstration: On note G un sous-groupe de $SO_3(\mathbb{N})$, G_0 la composante connexe de id dans G .

On a: 1) $G_0 \leq G$ 2) $G \trianglelefteq SO_3(\mathbb{N}) \Rightarrow G_0 \trianglelefteq SO_3(\mathbb{N})$

Montrons que: 3) G connexe par arcs; $G \neq \{\text{id}\}$; $G \trianglelefteq SO_3(\mathbb{N}) \Rightarrow G = SO_3(\mathbb{N})$

4) $G \trianglelefteq SO_3(\mathbb{N}) \Rightarrow G = \{\text{id}\}$ ou $SO_3(\mathbb{N})$.

3) Montrons que G contient un renversement.

Si θ est l'angle d'une rotation g de $\mathbb{N}^3$ alors il existe une base orthonormale dans laquelle sa matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

de sorte que $\text{tr}(g) = 2\cos(\theta) + 1$.

L'application $\varphi: SO_3(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $g \mapsto \cos(\theta) = \frac{\text{tr}(g) - 1}{2}$ est continue.

Il suffit de montrer que cette application prend la valeur -1 pour avoir une rotation d'angle π .

Par connexité de G , on va se ramener à trouver une rotation r de G d'angle θ tel que $\cos(\theta) = 0$ i.e. $\theta = \pm \pi/2$.

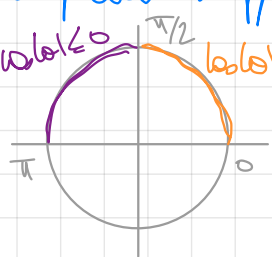
Admettons, $r^2 \in G$ a d'angle π .

Par hypothèse, $G \neq \{\text{id}\}$ donc $\exists g \in G / g \neq \text{id}$. Quitte à considérer g^{-1} , on peut supposer qu'une valeur θ de son angle est dans $]0, \pi]$.

* Si $\cos(\theta) \leq 0$, i.e. $\theta \in [\pi/2, \pi]$; on pose $s = g$

* Sinon, $\theta \in]0, \pi/2[$ et on pose $N = \mathbb{E}\left(\frac{\pi}{2\theta}\right)$ et on a:

$N\theta \leq \frac{\pi}{2} < (N+1)\theta < \frac{2\pi}{2} = \pi$ d'où g^{N+1} est une rotation d'angle $(N+1)\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$; et on pose $s = g^{N+1}$



Comme G est connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma_{\text{id} \rightarrow s}$

l'application $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \frac{1}{2} (\text{tr}(\gamma(t)) - 1)$ est continue et

$$f(0) = \frac{1}{2} (\text{tr}(\text{id}) - 1) = 1 \quad ; \quad f(1) = \frac{1}{2} (\text{tr}(s) - 1) = \cos(\theta) \leq 0$$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists t_0 \in [0,1] \mid f(t_0) = 0$

donc la rotation $r = \gamma(t_0)$ a un angle de $\pm \pi/2$ donc $R = r^2$ a un angle de π i.e. R est un retournement.

De plus, SO_3 agit transitivement sur les droites de $\mathbb{R}^3$ i.e. $\forall \Delta, D$ droite de $\mathbb{R}^3$, $\exists g \in \text{SO}_3 \mid D = g(\Delta)$ (4)

Or $\forall g \in \text{SO}_3$, $gRg^{-1} \in G$ car $G \trianglelefteq \text{SO}_3$ et $\text{tr}(gRg^{-1}) = \text{tr}(R)$ donc gRg^{-1} est d'angle π . Si $u \in \Delta$ où Δ est l'axe de R , alors $gRg^{-1}(g(u)) = g(u)$ donc gRg^{-1} est d'axe $g(\Delta)$

Finalement, tous les retournements sont conjugués dans G

Or toute rotation s'écrit comme le produit de 2 retournements, donc (5)
 $G = \text{SO}_3$.

4) On suppose que $G \trianglelefteq \text{SO}_3$, alors par 2), $G_0 \trianglelefteq \text{SO}_3$ et G_0 est par ailleurs
connexe par arcs. donc par 3), $G_0 \neq \{\text{id}\} \Rightarrow G_0 = \text{SO}_3$ et donc
 $G = \text{SO}_3$.

Supposons que $G_0 = \{\text{id}\}$ et montrons que $G = \{\text{id}\}$.

Les sous-groupes connexes de G sont des triangles: si g' est dans la
composante de g , reliée par γ alors $t \mapsto g^{-1}\gamma(t)$ relie id à $g^{-1}g'$

Ainsi $g^{-1}g' \in G_0 = \{\text{id}\}$ donc $g' = g$.

Supposons par l'absurde que G contient un élément $g \neq \text{id}$. Soit $h \in$
 $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ d'angle θ . Pour $t \in [0,1]$, on note h_t la rotation de même axe que
 h et d'angle $t\theta$. Comme $t \mapsto h_t$ est continue alors

$t \mapsto h_t g h_t^{-1}$ est un chemin de G (car $G \trianglelefteq \text{SO}_3$) d'origine g et d'extrémité

gh^{-1} . Ainsi : $hgh^{-1} = g$. Si Δ est l'axe de g alors celui de hgh^{-1} est $h(\Delta)$ donc $h(\Delta) = \Delta$, ce qui est impossible car une droite ne peut pas être invariante par toute rotation de l'espace. donc $G = \{id\}$ $\square$

① Chemin : application $\gamma: [0,1] \rightarrow G$ continue / $\gamma(0)$ est l'origine du chemin et $\gamma(1)$ est l'extrémité

On considère sur G la relation d'éq $g \sim h$ s'il existe un chemin de G reliant g à h :

* si $g \in G$, $g \sim g$ avec $\gamma(t) = g$

* $g \sim h \Rightarrow h \sim g$ avec $\gamma(t) = t g + (1-t) h$; $\gamma'(t) = \gamma(1-t) = (1-t)g + th$

* $g \sim h, h \sim k \Rightarrow g \sim k$ avec $\gamma(t) = t g + (1-t) h$; $\gamma'(t) = t h + (1-t) k$
 et $\gamma''(t) = \begin{cases} \gamma'(2t), & t \in [0, 1/2] \\ \gamma'(2t-1), & t \in [1/2, 1] \end{cases}$

les classes d'éq de cette relat° sont les composantes connexes par arcs de G . Montrer que $G_0 \subset SO_3$.

Par def, $id \in G_0$

Soient $g, h \in G_0$, $\gamma: id \rightarrow g$; $\gamma': id \rightarrow h$. Soit $\gamma''(t) = \gamma(t) (\gamma'(t))^{-1} \in G$

car $G \subset SO_3(\mathbb{H})$. L'application $g \mapsto g^{-1}$ est continue sur SO_3 (car on a identifié g^{-1} à sa matrice dans la BC, ce coeff dépendent polynomialement de coeff de g). de plus $\gamma''(0) = id$; $\gamma''(1) = gh^{-1}$. Ainsi :

$\gamma'' : id \rightarrow gh^{-1}$ donc $gh^{-1} \in G_0$

② Soit $g \in G_0$, $\gamma: id \rightarrow g$; $h \in SO_3$. Soit $\gamma'(t) = h \gamma(t) h^{-1} \in G$ car $G \subset SO_3$. γ' est continue et relie id à hgh^{-1} donc $hgh^{-1} \in G_0$ donc $G_0 \trianglelefteq SO_3$

③ Rami p. 300 Toute matrice orthogonale $A \in O(n)$ est orthogonalement semblable à une unique matrice diagonale par blocs de la forme

$\text{diag}(I_r, -I_s, K_{p_1}, \dots, K_{p_p})$ où $0 < r \leq \dots \leq p < \pi$

En effet: considérons dans $\mathbb{C}$, A est unitaire.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une VP non réelle, $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$ est aussi VP de même multiplicité que λ et à $\|v\|$ près.

$\mathbb{C}^n = \ker(A - \lambda I_n) \oplus \ker(A + \bar{\lambda} I_n) \oplus (E_1 \oplus F_1) \oplus \dots \oplus (E_p \oplus F_p)$ où

$E_h = \ker(A - \lambda_h I_n)$ et $F_h = \ker(A - \bar{\lambda}_h I_n)$

$\lambda_h := \cos(\theta_h) + i \sin(\theta_h)$, $\theta_h \in]0, \pi[$

Soit $h \in \{1, \dots, p\}$, soit $v_1, \dots, v_l$ une BON de E_h alors pour $1 \leq j \leq l$,

$w_j = \frac{1}{\sqrt{2}} (v_j + \bar{v}_j)$ et $w_j' = \frac{1}{i\sqrt{2}} (v_j - \bar{v}_j) \rightarrow (w_1, w_1', \dots, w_l, w_l')$ est

une BON de $E_h \oplus F_h$ formée de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $A(w_j) = \cos(\theta_j) w_j - \sin(\theta_j) w_j'$

et $A(w_j') = \sin(\theta_j) w_j + \cos(\theta_j) w_j'$

On réunit alors une base de $\ker(A - \lambda I_n)$, de $\ker(A + \bar{\lambda} I_n)$ et les p bases de la forme $(w_1, w_1', \dots, w_l, w_l')$

④ **Notion** Soient D, Δ légendrés par d, f mutuels

Soient $(e_1, e_1'), (e_2, e_2')$ base de $D^\perp$, $\Delta^\perp$ resp.

Alors $(d, e_1, e_1'), (f, e_2, e_2')$ sont 2 bases de $\mathbb{R}^3$ et on note P la

matrice de passage de (d, e_1, e_1') à (f, e_2, e_2')

$P = \text{Mat}_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ ancienne nouvelle alors $P \in O_3(\mathbb{R})$

($P \in O_3(\mathbb{R}) \iff P$ transforme une BON en une BON)

Quant à perdre $-f$, on a $P \in O_3(\mathbb{R})$

⑤ **francine** 3p 61 1) (q $\forall a \in O(E)$), on peut s'écrire comme produit d'un plus r réflexes où $r = \text{rg}(a - \text{id}_E)$.

l'endomorphisme sur r :

$$\neq r = 0 \Rightarrow u = id_E$$

* $r \geq 1$, on reprend le résultat vrai pour $\operatorname{rg}(u - id_E) < r$.

Comme $u \neq id$, $\exists e$ du noyau $\perp$ $\langle u(e) - e \rangle$.

$$\langle u(e) - e, u(e) + e \rangle = \|u(e)\|^2 - \|e\|^2 = 0 \text{ donc}$$

$u(e) - e \perp u(e) + e$. Ainsi, la réflexion par rapport à $\langle u(e) - e \rangle^\perp$ vérifie $s(u(e) + e) = u(e) + e$ et $s(u(e) - e) = -(u(e) - e) = e - u(e)$ donc échange e et $u(e)$

de plus:

$$\ker(u - id_E) \subset \ker(sou - id_E)$$

Soit $x \in \ker(u - id_E)$ alors $u(x) = x$

Montrons que $sou(x) - x = 0$ et $s(x) = x$

Il suffit de voir $x \perp u(e) - e$

$$\begin{aligned} \langle x, u(e) - e \rangle &= \langle x, u(e) \rangle - \langle x, e \rangle \quad \leftarrow u \in O(E) \\ &= \langle u(x), u(e) \rangle - \langle x, e \rangle = \langle x, e \rangle - \langle x, e \rangle = 0 \end{aligned}$$

$x \in \ker(u - id_E)$

L'inclusion est stricte car $e \in \ker(sou - id_E)$ et $e \notin \ker(u - id_E)$

On peut passer à sou ($\operatorname{rg}(sou - id_E) < \operatorname{rg}(u - id_E)$), $\exists r \dots$ réflexions

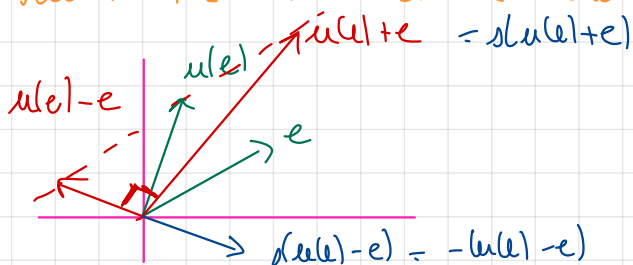
tel $sou = s_1 \circ \dots \circ s_p$ avec $p \leq \operatorname{rg}(sou - id_E)$

Donc $u = s_1 \circ \dots \circ s_p$
 $p+1$ réflexions avec $p+1 \leq r$

2) Soit les autovaleurs engendrent $\mathbb{D}_3(E)$.

Soit $u \in O_3^+(E)$ ($u \neq id_E$). Alors $\operatorname{rg}(u - id_E) = 2$ car $\ker(u - id_E)$ est une droite (axe de u). Alors $\exists s_1, s_2$ réflexions ($u = s_1 s_2$)

Or si K est un plan de E et s la réflexion par rapport à K , alors s



soit le retournement par rapport à la droite $D = \mathbb{R}^+$ et la relation $u = (-u_1) \circ (-u_2)$ montre que u est la composition de 2 retournements