Théorème central limite : Bernis p. 209 261-262-264-266

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et identiquement distribuées, éléments de L^2.

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $\overline{X_n} = \frac{1}{n} S_n$

On suppose que $\mathrm{Var}(X_i) \neq 0$

Alors : $\sqrt{n}\left(\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_1)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X_1))$

Démonstration : Quitte à centrer et réduire (1) les variables aléatoires, on peut supposer que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathrm{Var}(X_1) = 1$

D'après le théorème de Paul Lévy, (2) il suffit de montrer que la suite de fonctions caractéristique $\left(\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $\sqrt{n}\,\overline{X_n} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction caractéristique d'une loi normale centrée réduite : $t \mapsto e^{-t^2/2}$. (3)

Soit $t\in\mathbb{R}$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, comme $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendants, identiquement distribués :

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \mathbb{E}\left(\exp\left(it\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(it\frac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n \exp\left(\frac{itX_k}{\sqrt{n}}\right)\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left(\exp\left(it\frac{X_k}{\sqrt{n}}\right)\right) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$

Or $X_1 \in L^2$ donc $\varphi_{X_1}\in C^2$ donc :

$$\varphi_{X_1}(h) = \varphi_{X_1}(0) + h\varphi_{X_1}'(0) + \frac{h^2}{2}\varphi_{X_1}''(0) + \underset{h\to0}{o}(h^2)$$

où $\varphi_{X_1}'(0) = i\,\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\varphi_{X_1}''(0) = -\mathbb{E}(X_1^2) = -\mathrm{Var}(X_1) = -1$ (4)

donc $\varphi_{X_1}(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + \underset{h\to0}{o}(h^2)$ $(*)$

Or, $\forall a,b\in\overline{D(0,1)}$, $\forall n\geq 1$, $|a^n - b^n| \leq n|a-b|$

En effet : $|a^n - b^n| = |a-b|\left|\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}\right| \leq |a-b|\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{|a^k b^{n-k}|}_{\leq 1} \leq n|a-b|$

$(*) \Rightarrow \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^2}{n}\varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ où $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

Il existe $N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N$, $\left|1 - \frac{t^2}{2n}\right| \leq 1$

Donc par la remarque qui précède : $\forall n \geq N$,

$$\left|\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n\right| \leq n\left|\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 + \frac{t^2}{2n}\right|$$

$$\leq n\left|\frac{t^2}{n}\varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| = t^2\left|\varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Or $\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-t^2/2}$ (5)

Donc par inégalité triangulaire (6) : $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-t^2/2}$ ■

Application : le théorème de Moivre-Laplace

Soient $p \in]0,1[$, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n \sim \mathcal{B}(n,p)$. Alors : $\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

En effet : soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de VAR iid de loi $\mathcal{B}(p)$

Les $X_i \in L^2$ donc on peut leur appliquer le théorème central limite : de la

$$\sqrt{n}\left(\overline{X_n} - p\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

i.e. : $\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right) \times \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

i.e. : $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - p}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Or Y_n et $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ont même loi, (7) d'où le résultat ■

(1) On pose $Y_n = \frac{X_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}}$ alors $\sqrt{n}\,\overline{Y_n} \to \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow$

$$\sqrt{n}\left(\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_1)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\operatorname{Var}(X_1)}\,\mathcal{N}(0,1) \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, \operatorname{Var}(X_1))$$

③ $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\mathbb{P}_X(x)$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dx$$

$$-\frac{x^2}{2} + itx = -\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{it}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{t^2}{2}$$

Donc $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - i\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 - t^2/2}\, dx \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$= e^{-t^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{x-it}{\sqrt{2}}\right)^2} dx \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\, du}_{=\sqrt{\pi}\ (1)} \sqrt{2} = e^{-t^2/2}$$

$u = \frac{x-it}{\sqrt{2}}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

④ $\varphi_{X_1}(0) = \mathbb{E}(e^0) = 1$

$\varphi_{X_1}(t) = \mathbb{E}(e^{itX_1}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\mathbb{P}_{X_1}(x)$

- $x \mapsto e^{itx} \in L^1$ car $|e^{itx}| \leq 1 \in L^1$
- $f : t \mapsto e^{itx} \in C^2$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = ix e^{itx}$

  $f''(t) = -x^2 e^{itx}$
- $|f''(t)| \leq x^2 \in L^1$

Donc $\varphi_{X_1}'(t) = \int_{\mathbb{R}} ix e^{itx}\, d\mathbb{P}_{X_1}(x) \Rightarrow \varphi_{X_1}'(0) = \int_{\mathbb{R}} ix\, d\mathbb{P}_{X_1}(x) = i\,\mathbb{E}(X_1)$

$\varphi_{X_1}''(t) = \int_{\mathbb{R}} -x^2 e^{itx}\, d\mathbb{P}_{X_1}(x) \Rightarrow \varphi_{X_1}''(0) = \int_{\mathbb{R}} -x^2\, d\mathbb{P}_{X_1}(x) = -\mathbb{E}(X_1^2)$

$= -\operatorname{Var}(X_1) = -1$

⑤ $\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)}$

$\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$

$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(2X\mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(X)^2$

$$\ln\left(1-\frac{t^2}{2n}\right) = -\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)_{n\to+\infty} \qquad \left(= E(X^2) - E(X)^2 \right)$$

Donc $n\ln\left(1-\frac{t^2}{2n}\right) = -\frac{t^2}{2} + o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{t^2}{2}$

Donc $\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t^2/2}$

6) $\left|\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) - e^{-t^2/2}\right| \leq \underbrace{\left|\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) - \left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^n\right|}_{\to 0} + \underbrace{\left|\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^n - e^{-t^2/2}\right|}_{\to 0}$

7) $X_i \sim B(p)$, $Y_n = B(n,p)$, mq $\sum X_i \sim Y_n$

$P\left(\sum_{i=1}^n X_i = k\right) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = P(Y_n = k)$

2) 20 p. 536 Soient $X_1 \dots X_n$ des VA IR

1) On a eq entre :

(i) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

(ii) $\varphi_{X_n} \to \varphi_X$ simplement

2) $\varphi_{X_n} \to \varphi$ simplement, φ continue $\Rightarrow \varphi = \varphi_X$ d'une var X et $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

1) $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\,du \times \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2}\,dv = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-(u^2+v^2)}\,du\,dv \qquad (*)$$

On pose $u = r\cos(\theta)$, $v = r\sin(\theta)$ alors $u^2+v^2 = r^2$

$$\varphi :]0,+\infty[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$
$$(r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

$$\det \operatorname{Jac}(\varphi) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

$$(*) = \int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{+\infty} = \pi .$$

donc $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$.