

$GL(\mathbb{C})$  est dense, ouvert et connexe: (Cours de voyage p. 114) 106-204

\* Pour  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $GL(K)$  est ouvert et dense dans  $M_n(K)$

\*  $GL(\mathbb{C})$  est connexe par arcs (donc connexe).

Démonstration: \*  $\forall A \in M_n(K)$ ,  $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i} \in K$

donc  $\det(A)$  est un produit et somme finis de coefficients de  $A$  donc  $\det$  est continue.

$GL(K) = \det^{-1}(K^*)$  est ouvert en tant qu'image d'un ouvert par une application continue.

Soit  $A \in M_n(K)$ . Montrons qu'il existe  $(A_h)_{h \in \mathbb{N}} \in GL(K) / A_h \rightarrow A$

• Si  $A \in GL(K)$ , on pose  $A_h = A \quad \forall h$

• Sinon,  $0 \in \text{Sp}(A)$ . Alors  $\text{Sp}(A) \cap \{0\} = \emptyset$  ou est fini

S'il est non vide, il possède un élément minimal non nul  $m$  et alors pour  $s > \frac{1}{m}$ ; on a  $0 < |s| < \frac{1}{s} \Rightarrow s \notin \text{Sp}(A)$

S'il est vide, on prend on considère  $s > 0$ .

donc les deux cas:  $(A - \frac{1}{h} \text{Id})_{h \geq s} \in GL(K)^{\mathbb{N}}$  et

$A - \frac{1}{h} \text{Id} \xrightarrow{h \rightarrow \infty} A$  par finitude de  $\text{Sp}(A)$ ,  $\exists K \in \mathbb{N} \mid \forall h \geq K, \frac{1}{h} \notin \text{Sp}(A)$   
donc  $A - \frac{1}{h} \text{Id} \in GL(K) \quad \forall h \geq K$  et  $A - \frac{1}{h} \text{Id} \rightarrow A$

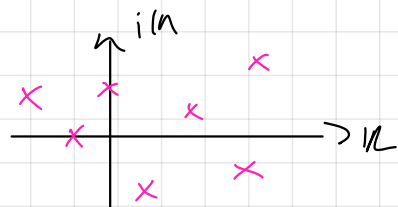
\*  $K = \mathbb{C}$ ; comme  $\det(A)$  est polynomiale en les coefficients de  $A$ , alors  $P: t \mapsto \det(A(t-t) + Bt)$  est polynomiale ent,  $\forall A, B \in GL(\mathbb{C})$

de plus:  $P(0) = \det(A) \neq 0$ ;  $P(1) = \det(B) \neq 0$  car  $A, B \in GL(\mathbb{C})$

donc la fonction polynomiale  $P$  est non identiquement nulle donc le polynôme  $P$  associé non plus.

$P$  possède alors un nombre fini de zéros dans  $\mathbb{C}$ . Construisons un chemin  $\gamma$  reliant 0 à 1, évitant les zéros de  $P$ .

Soit  $\lambda_n \in Z(P) = \{\text{zéros de } P\} / \text{Im}(\lambda_n)$  soit



minimale non nulle. Or pose  $\alpha_n = i$  si  $\mathbb{Z}(p) \subset \mathbb{R}$

$$\text{Alors } \gamma(t) = \begin{cases} t + it \operatorname{Im}(\alpha_n), & t \in [0, 1/2] \\ t + i(1-t) \operatorname{Im}(\alpha_n), & t \in [1/2, 1] \end{cases} \quad \text{convexe} \quad \textcircled{1}$$

En effet:  $t=0$  et  $1$  n'annulent pas  $p$  et  $t \in ]0, 1[$  ;

$$0 < \operatorname{Im}(\gamma(t)) \leq \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\alpha_n) < \operatorname{Im}(\alpha_n) \quad \text{donc } \gamma(t) \notin \mathbb{Z}(p)$$

Construisons maintenant un arc dans  $\operatorname{Gh}(\mathbb{C})$ , reliant  $A$  à  $B$

$$\text{Soit } \alpha: [0, 1] \rightarrow \operatorname{Gh}(\mathbb{C}) \quad ; \alpha \text{ est continue car } \gamma \text{ l'est et} \\ t \mapsto (1-\gamma(t))A + \gamma(t)B \quad \text{et bien à valeurs dans } \operatorname{Gh}(\mathbb{C})$$

par construction de  $\gamma$ .

Finalement: on a construit un arc convexe reliant  $A$  à  $B$  dans  $\operatorname{Gh}(\mathbb{C})$

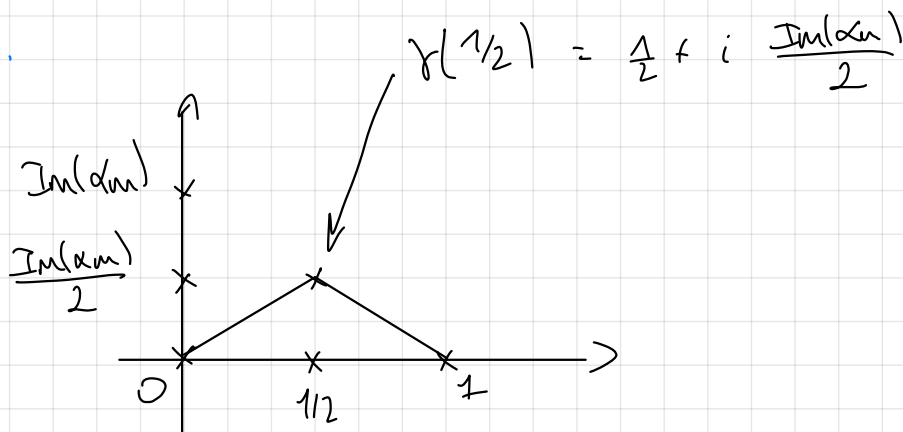
Application:  $\mathcal{Q} = \{ n \in \operatorname{dh}(\mathbb{C}) \mid \arg(n) = \pi \}$  est convexe

$$n \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow \exists p, q \in \operatorname{Gh}(\mathbb{C}), n = p \gamma q^{-1} \quad \text{où } \gamma = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } \phi: \operatorname{Gh}(\mathbb{C}) \times \operatorname{Gh}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{Q} \quad ; \phi \text{ est bien définie et} \\ (p, q) \mapsto p \gamma q^{-1} \quad \text{surjective}$$

Elle est continue car la multiplication de matrices est une application polynomiale de  $\operatorname{dh}(\mathbb{C}) \times \operatorname{dh}(\mathbb{C}) \rightarrow \operatorname{dh}(\mathbb{C})$  et  $q \mapsto q^{-1} = \frac{1}{\det(q)} {}^t \operatorname{con}(q)$  est continue de  $\operatorname{Gh}(\mathbb{C})$  dans  $\operatorname{Gh}(\mathbb{C})$

Or  $\operatorname{Gh}(\mathbb{C}) \times \operatorname{Gh}(\mathbb{C})$  est convexe donc  $\phi(\operatorname{Gh}(\mathbb{C}) \times \operatorname{Gh}(\mathbb{C})) = \mathcal{Q}$  est convexe.



$\textcircled{1}$