

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors:

1) $\det$ est $\mathbb{C}'$ sur E et $D\det(I_n) = \text{tr}$

2) $\forall A, H \in E$, $D\det(A)(H) = \text{tr}({}^t\bar{A} H)$ où $\bar{A} = \text{con}(A)$ ①

3) Si $y_1, \dots, y_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont solution de $y' = A(t)y$ où $A: t \mapsto A(t) \in E$ est continue, et si on pose $w(t) = \det(y_1(t), \dots, y_n(t))$; alors $w'(t) = \text{tr}(A(t)) w(t)$ et $\det(e^{tA}) = e^{\text{tr}(A)}$ pour A constante.

Démonstration: ⑤ 1) On munit E d'une norme quelconque. $\det$ est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice donc de $\det$ sur E .

Soit $H \in E$, notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ses valeurs propres. Soit $t \in \mathbb{R}$

On a alors $\text{Sp}(I_n + tH) = \{1 + t\lambda_1, \dots, 1 + t\lambda_n\}$

Donc $\det(I_n + tH) \stackrel{②}{=} \prod_{i=1}^n (1 + t\lambda_i) = 1 + t \sum_{i=1}^n \lambda_i + o(t)$
 $= 1 + t \text{tr}(H) + o(t)$
 $\quad \quad \quad t \rightarrow 0$

Comme tr est linéaire: $D\det(I_n) = \text{tr}$. ③

2) * Si $A \in \text{GL}(n)$; $\det(A + H) = \det(A) \det(I_n + A^{-1}H)$
 $= \det(A) (1 + \text{tr}(A^{-1}H) + o(\|A^{-1}H\|))$ ④
 $\quad \quad \quad H \rightarrow 0$
 $= \det(A) + \text{tr}({}^t\bar{A} H) + o(\|H\|)$
 $\quad \quad \quad H \rightarrow 0$

Car ${}^t\bar{A} = \det(A) A^{-1}$ donc $\det(A) \text{tr}(A^{-1}H) = \text{tr}(\det(A) A^{-1} H)$
 $= \text{tr}({}^t\bar{A} H)$

Or $\text{tr}({}^t\bar{A} \cdot)$ est linéaire donc $D\det(A)(H) = \text{tr}({}^t\bar{A} H) \forall H \in E$

* Cas général: $\text{GL}(n)$ est un ouvert dense de E .

En effet: •) $\text{GL}(n) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est ouvert au haut qu'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue.

•) Soit $A \in E$ / $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Alors il existe $(e_k)_k \in \mathbb{R}^n$ ⑤

~~telle que $\exists h \rightarrow 0$ et telle que $\forall h \in \mathbb{N}$, $\det(A - \exists h \text{In}) = \prod_{i=1}^n (1 - \exists h) \neq 0$~~
 ~~$\forall h \in \mathbb{N}$ par continuité de $\det(A)$ donc $A - \frac{1}{h} \text{In} \in \text{GL}(n)$ $\forall h > 0$~~
 ~~$\forall h, A - \frac{1}{h} \text{In} \in \text{GL}(n)$ et $A - \frac{1}{h} \text{In} \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} A \in E$, d'où la densité.~~

finallement : comme $A \mapsto \bar{A}$ est continue de E dans E (les coefficients sont des fonctions polynomiales des coefficients de A) et que $\det$ est C^1 alors l'expression obtenue pour $D \det(A)$ où $A \in \text{GL}(n)$, se prolonge par continuité à E tout entier. (7) $D \det(A)(\cdot) = \text{tr}(\bar{A} \cdot)$
 $\downarrow$
 $D \det(A)(\cdot) = \text{tr}(\bar{A} \cdot)$

3) Soit $Y = (y_1 | \dots | y_n) \in E$; alors $w(t) = \det(Y(t))$ et $Y' = AY$

$$\begin{aligned} \text{On a: } w'(t) &= D \det(Y(t)) \circ Y'(t) = \text{tr}(\bar{Y}(t) Y'(t)) \text{ par 2)} \\ &= \text{tr}(\bar{Y}^A Y^B A Y) \\ &= \text{tr}(\bar{Y}^B A Y^A) \quad (Y \in \text{GL}(n)) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \bar{Y}^A Y^A = \det(Y) \text{In} = w(t) \text{In} \text{ donc } w'(t) = \text{tr}(A(t)) w(t)$$

$$\text{donc } w(t) = \exp\left(\int_0^t \text{tr}(A(s)) ds\right) w(0)$$

$$\begin{aligned} Y^{-1} &= \det(Y)^{-1} \bar{Y} \\ \Rightarrow \text{In} &= \det(Y) Y^T Y^{-1} = \det(Y) \bar{Y}^A Y^A \end{aligned}$$

Si A est constante alors $Y' = AY$ a pour solution $Y = e^{tA}$

$$\text{et donc } \det(Y(t)) = w(t) = \exp\left(\int_0^t \text{tr}(A) ds\right) \underbrace{w(0)}_{=1}$$

$$\text{i.e. : } \det(e^{tA}) = \exp(t \text{tr}(A))$$

① $(\text{com}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ où $A_{ij} = A$ où l'on a supprimé la i ème ligne et la j ème colonne.

② $\text{In} + tH$ est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ donc $\det(\text{In} + tH) = \prod_{i=1}^n (1 + t\lambda_i)$

③ Ici, $\det$ est C^1 donc différentiable donc dérivable, même dans les directions H , et les dérivées valent $D \det(\text{In})(H) = \text{tr}(H)$

$$\begin{aligned} \text{④ } D \det C^1 \text{ en } \text{In} \text{ donne } \det(\text{In} + A'(H)) &= \det(\text{In}) + D \det(\text{In})(A'(H)) + o(\|H\|) \\ &= \det(\text{In}) + \text{tr}(A'(H)) + o(\|H\|) \end{aligned}$$

(Taylor à l'ordre 1)

$$\textcircled{5} \det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{\sigma(i), i} \quad \text{Kauubaldi}$$

$$\textcircled{6} \text{ Si } A \in \text{GL}(n), \quad 0 \in \text{Sp}(A) \text{ et on note } \mu = \min_{\lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{0\}} |\lambda|$$

$$\Rightarrow \bigwedge_{i=1}^n (x_i - t); \quad x_i - t \neq 0 \quad \forall i$$

Pour tout $t \in]0, \mu[$, $\det(A - t \text{Id}) \neq 0$ donc $A - t \text{Id} \in \text{GL}(n)$

$$A_k = A - \frac{1}{k+1} \text{Id} \in \text{GL}(n) \text{ pour } k \text{ suffisamment grand}$$

(k grand $\Rightarrow \frac{1}{k+1} \in]0, \mu[$ à partir d'un certain rang)

$$\text{Ev } A_k \rightarrow A$$

$$\textcircled{7} \det(A_k)(k) = \text{tr}({}^t \overline{A_k} k)$$

$$\downarrow k \rightarrow \sigma \quad \downarrow k \rightarrow \sigma$$

$$\det(A)(k) = \text{tr}({}^t \overline{A} k)$$

Grandon analyse. p. 368

Application: $x^2 y'' - xy' + y = 0 \quad ; n \in]0, \infty[$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \quad ; n \mapsto x \text{ est solution évidente}$$

$uy \downarrow$

$$w'(n) = \text{tr}(A(n)) w(n) = \frac{1}{x} w(n) \quad x \mapsto x \text{ est solution évidente}$$

$$w(n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} = xy_2' - y_2 = C \quad \text{?}$$

$$\Rightarrow y_2' = \frac{1}{x} y_2 + C \Rightarrow y_2 = A \ln(x) + Cx$$

$$\varphi(t) =$$

$$y_i: n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto (y_{i1}(t), \dots, y_{in}(t))$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) \\ \vdots & \vdots \\ y_{i1}(t) & y_{n1}(t) \end{pmatrix}$$

