

Critère fondamental de convergence de méthode itérative: ^{1) pas utile.} Giarlet p. 96 162-205 149

Soit $Au = b$ un système linéaire d'inconnue u ; où $A \in \mathcal{M}(K)$, $b \in K^n$.

On suppose qu'on dispose d'une matrice B et d'un vecteur c obtenus par une certaine méthode ^① (par exemple Gauss-Jacobi, Jacobi...) tels que: $(I_n - B) \in \mathcal{M}(K)$ et que l'unique solution du système linéaire $u = Bu + c$ soit également la solution de $Au = b$.

On définit la méthode itérative $\left\{ \begin{array}{l} u_0 \in K^n \\ u_{k+1} = Bu_k + c ; k \geq 0 \end{array} \right.$

la méthode est dite convergente si $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u \quad \forall u_0 \in K^n$

Cela revient à dire que: $eh \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ où $eh = u_k - u \quad \forall k \geq 0$. ^②
 $= B^k e_0 \quad (*)$

Alors la méthode converge si elle vérifie l'une des 4 propriétés équivalentes:

i) $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0$

iii) $\rho(B) < 1$

ii) $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k v = 0 \quad \forall v \in K^n$

iv) $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée u.u

Lemme: ~~soit $A \in \mathcal{M}(K)$, soit $\rho(A)$ une norme quelconque. Alors $\rho(A) \leq \|A\|$~~ ^{pas utile}

b) Soient $A \in \mathcal{M}(K)$, $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle ^{$\rightarrow$ dépend de A et ε} subordonnée telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$. ^{$\rightarrow$ ordre de quantificateurs.}

Démonstration: a) Soit $p \in K^n \setminus \{0\} \mid Ap = \lambda p, \lambda = \rho(A)$
Soit $q \in K^n \mid p q^T \neq 0$.
Comme $\rho(A) \|p q^T\| = \|p q^T\| = \|A p q^T\| \leq \|A\| \|p q^T\|$ on a: $\rho(A) \leq \|A\|$.
^{unitaire mais pas utile}

b) $\exists U \in \mathcal{GL}(K) \mid U^{-1}AU$ est triangulaire supérieure:

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{où les } \lambda_i \text{ sont les valeurs propres de } A$$

$\forall \delta > 0$, soit $D_\delta = \text{diag}(1, \delta, \dots, \delta^{n-1})$ de sorte que :

$$(WD_\delta)^{-1} A (WD_\delta) = \begin{pmatrix} 1 & \delta t_{12} & \delta^2 t_{13} & \dots & \delta^{n-1} t_{1n} \\ & 1 & \delta t_{23} & \dots & \delta^{n-2} t_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \delta t_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

voir Itenham.

$$\begin{aligned} \|B\|_\infty &= \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|Bx\|_\infty \\ &= \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|(WD_\delta)^{-1} Bx\|_\infty \\ &= \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|(WD_\delta)^{-1} B (WD_\delta) (WD_\delta)^{-1} x\|_\infty \\ &= \sup_{\|y\|_\infty \leq 1} \|(WD_\delta)^{-1} B (WD_\delta) y\|_\infty \\ &= \max_i \sum_j |a_{ij}| = \|C\|_\infty \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, fixons $\delta > 0$ tel que $\sum_{j=i+1}^n |\delta^{j-i} t_{ij}| \leq \varepsilon \quad \forall 1 \leq i \leq n-1$ (4)

Alors $\| \cdot \| : B \mapsto \|B\|_\infty = \|(WD_\delta)^{-1} B (WD_\delta)\|_\infty$ est la norme vectorielle.

On a d'une part : $\|A\|_\infty \leq \rho(A) + \varepsilon$ (5) et d'autre part : c'est la norme matricielle vectorielle à $v \in \mathbb{K}^n \mapsto \|(WD_\delta)^{-1} v\|_\infty$ (6)

Démonstration: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\forall v \in \mathbb{K}^n, \|B^h v\|_\infty \leq \|B^h\|_\infty \|v\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$

Donc $B^h v \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) si $\rho(B) > 1$, $\exists p \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \mid Bp = \lambda p ; |\lambda| > 1$

Donc $(B^h p)_h = (\lambda^h p)_h$ ne peut pas converger vers 0.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Convergence du b) du lemme.

(iv) $\Rightarrow$ (i) $\forall h \in \mathbb{N}, \|B^h\|_\infty \leq \|B\|_\infty^h \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$ donc $B^h \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$

Finalement : la méthode converge si l'une des 4 propriétés est vérifiée. $\square$
d'après (*)

① Méthode générale : on veut écrire $A = \Pi - N$ où $\Pi \in GL_n(\mathbb{K})$ est facile à inverser (sans pour autant calculer Π^{-1} !)

↳ diag ou triang (+ par blocs éventuellement)

Le qu'on calcule, c'est la solution du syst linéaire dont la matrice est Π .

$$A u = b \Leftrightarrow (\Pi - N) u = b \Leftrightarrow \Pi u = N u + b \Leftrightarrow u = \underbrace{\Pi^{-1} N u}_{\tilde{B}} + \underbrace{\Pi^{-1} b}_c$$

On associe la méthode it : $u_{k+1} = \Pi^{-1} N u_k + \Pi^{-1} b \quad ; u_0 \in \mathbb{K}^n$.

Donc la matrice est $B = \Pi^{-1}N = I - \Pi^{-1}A$

ce qui montre que $I - B = \Pi^{-1}A \in GL(n, K)$

Dans la pratique, on est amené à résoudre $\Pi u_{k+1} = \Pi u_k + b \quad \forall k \geq 0$

• Méthode de Jacobi : $A = D - E - F$ où $a_{ii} \neq 0$!!

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A = D - E - F$$

Donc $\Pi = D$ et $N = E + F$, $\Pi \in GL(n, K)$ car $a_{ii} \neq 0$.

Donc $Au = b \Leftrightarrow Du = (E + F)u + b \Leftrightarrow u = D^{-1}(E + F)u + D^{-1}b$

ce qui conduit à : $Du_{k+1} = (E + F)u_k + b \Leftrightarrow u_{k+1} = D^{-1}(E + F)u_k + D^{-1}b$

la matrice de la méthode est alors $J = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{k+1} \\ \vdots \\ u_n^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^k \\ \vdots \\ u_n^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

• Méthode de Gauss-Jacobi : Par améliorer Jacobi, on va utiliser les nouvelles valeurs calculées au fur et à mesure.

Par ex : pour calculer u_2^{k+1} , on utilise u_1^{k+1} et non pas u_1^k

Cela revient à définir : $Du_{k+1} = Eu_{k+1} + Fu_k + b$

$$\Leftrightarrow u_{k+1} = (D - E)^{-1}Fu_k + (D - E)^{-1}b$$

Comme $D - E \in GL(n, K)$ car $a_{ii} \neq 0$, $(D - E)^{-1}F = G$: mat de G-S.

$$\textcircled{2} \quad e_k = u_k - u = Bu_{k-1} + c - (Bu_{k-1} + c) = B^1(u_{k-1} - u) = \dots = B^k(u_0 - u) = B^k e_0$$

$$(3) \quad W D_f^{-1} A (W D_f) = D_f^{-1} U^{-1} A U D_f = D_f^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & t_{21} & \dots & t_{2n} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} D_f$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_1^{-1} & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 0 & f_{-n+1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & t_{21} & \dots & t_{2n} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & s & & \\ & & \ddots & \\ & & & s^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_1^{-1} & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 0 & f_{-n+1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & t_{21} & \dots & t_{2n} \\ 0 & s^{-1} \lambda_2 & \dots & s^{-1} t_{2n} \\ & \ddots & & \\ 0 & & 0 & s^{-n+1} \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & s t_{22} & \dots & s^{n-1} t_{2n} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the transformation of matrix elements. A pink arrow points from the boxed term $s^{n-1} t_{2n}$ in the second matrix to the boxed term $s^{n-1} t_{2n}$ in the third matrix.

$$(4) \quad \text{let } \varepsilon > 0, \delta > 0 \mid \sum_{j=i+1}^n |f^{j-i} t_{ij}| \leq \varepsilon$$

$$\text{pour } i = 1 : \sum_{j=2}^n |f^{j-1} t_{1j}|$$

$$(5) \quad \text{donc } \|A\| = \| (W D_f)^{-1} A W D_f \|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

$$= \max_i |\lambda_i| + \underbrace{\sum_{j=i+1}^n |f^{j-i} t_{ij}|}_{\leq \varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon$$

$$(6) \quad \text{il s'agit de mg } \|B\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\| (W D_f)^{-1} v \|_\infty}{\|v\|_\infty}$$

$$\|B\| = \| (W D_f)^{-1} B W D_f \|_\infty = \max_i \sum_j |b_{ij}|$$