Différentielle de l'exponentielle : Rouvière p. 297   156 – 220 – 221

$$\forall X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad D_{\exp}(X)(H) = e^X \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\operatorname{ad} X)^k}{(k+1)!} H \quad \text{où } \operatorname{ad} X(H) = XH - HX$$

Démonstration : 1) Pour E evn de dimension finie, $H \in E$, $A \in \mathcal{L}(E,E)$,

on résout :

$$(a) \begin{cases} f'(t) = A f(t) \\ f(0) = H \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} g'(t) = e^{-tA} H \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Par dérivation terme à terme : $(e^{-tA})' = -A e^{tA} = -e^{tA} A$

donc (a) $\Rightarrow \left(e^{-tA} f(t)\right)' = e^{-tA} f'(t) - e^{-tA} A f(t) = 0$

D'où $e^{-tA} f(t) = e^0 f(0) = H$. $\boxed{\text{Donc } f(t) = e^{tA} H}$

Par intégration terme à terme : $\boxed{g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k+1} A^k}{(k+1)!} H}$

En effet : $g(0) = 0$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} A^k H = 0$

2) Ici, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; alors $\forall X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $e^X H e^{-X} = e^{\operatorname{ad} X} H$

En effet : posons $f(t) = e^{tX} H e^{-tX}$

Alors $f'(t) = X \underbrace{e^{tX} H e^{-tX}}_{H} - \underbrace{e^{tX} H e^{-tX}}_{H = f(t)} X = \operatorname{ad} X(f(t)) = A f(t)$

On applique 1) à $A = \operatorname{ad} X \in \mathcal{L}(E,E)$ $(f(0) = H)$ et on obtient

$f(t) = e^{t \operatorname{ad} X} H$

donc en $t = 1$; $e^{\operatorname{ad} X} H = e^X H e^{-X}$

3) On admet que $\exp : E \to E$ est C^2 1. Soient $t, u \in \mathbb{R}$ et

$g(t) = \partial_{u=0}\left(e^{-tX} e^{t(X+uH)}\right)$. Déterminons g'.

$g(0) = \partial_{u=0}(1) = 0$. Comme $\exp$ est C^2 alors $(t,u) \mapsto e^{-tX} e^{t(X+uH)}$

aussi donc par le théorème de Schwarz :

$g'(t) = \partial_{u=0} \partial_t \left(e^{-tX} e^{t(X+uH)}\right)$

$$= \partial_{u=0}\left[-Xe^{-tX} e^{t(X+uH)} + e^{-tX}(X+uH)e^{t(X+uH)}\right]$$

$$= \partial_{u=0}\left[e^{-tX} u H e^{t(X+uH)}\right] = e^{-tX} H e^{tX}$$

$$= e^{\mathrm{ad}(-tX)} H \quad \text{par } 2)$$

4) Conclusion : avec $A = -\mathrm{ad}\,X$, $t=1$ par 1) et 3), on a :

$$g(1) = \partial_{u=0}\left(e^{-X}e^{X+uH}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{ad}\,X)^k}{(k+1)!}H$$

Comme exp est différentiable en X, on a par ailleurs :

$$e^{X+uH} = e^X + u\,D\exp(X)H + o(\|uH\|)$$

$$e^{-X}\left(e^X + u\,D\exp(X)(H) + o(\|uH\|)\right)$$
$$= 1 + u\,e^{-X}D\exp(X)(H) + o(\|uH\|)$$
et
$$\partial_{u=0}(\;) = e^{-X}D\exp(X)(H)$$

donc $\partial_{u=0}\left(e^{-X}e^{X+uH}\right) = e^{-X}D\exp(X)(H)$

donc $D\exp(X)(H) = e^X \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{ad}\,X)^k}{(k+1)!}H$

Remarque : $\left(e^{X(t)}\right)' = D\exp(X)\,X'(t)$
$$= e^{X(t)}\left(X'(t) - \frac{1}{2}[X,X'] + \frac{1}{3!}[X,[X,X']] + \dots\right)$$

Si $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ alors $X(t)^n = X(t)\ \forall n \geq 1$

donc $e^{X(t)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{X(t)^n}{n!} = I_n + X(t)(e^1 - 1)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e-1 & t(e-1) \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & t(e-1) \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Et $\left(e^{X(t)}\right)' = \begin{pmatrix} 0 & e-1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \neq e^{X(t)}X'(t) = \begin{pmatrix} e & t(e-1) \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 0\end{pmatrix}$

donc $\left(e^{X(t)}\right)' \neq e^{X(t)}X'(t)$ en général, sauf si X commute à X'

car dans ce cas : $[X, X'] = 0$.