

Equation de Hill - Mathieu: ZQ p. 410 220-221

Soit (E): $y'' + qy = 0$ où $q \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, π -periodique paire.

On note (y_1, y_2) la base de solutions associée à (E) et $\begin{cases} y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0 \\ y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1 \end{cases}$

On note $A: W \rightarrow W$
 $y \mapsto y(\cdot + \pi)$, de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$

On note $T = \text{tr}(A)$ dans la base (y_1, y_2) ①

Alors: 1) $|T| < 2 \Rightarrow$ les solutions de (E) sont bornées

2) $|T| = 2 \Rightarrow$ (E) possède une solution non nulle bornée

3) $|T| = 2 \Leftrightarrow bc = 0$

4) $|T| > 2 \Rightarrow$ les solutions de (E) non nulles sont non bornées.

Lemme: (i) y_1 est paire, y_2 est impaire et $\det(A) = 1$

(ii) $a = d$ et $y_1(\pi) = y_2'(\pi)$.

Démonstration: (i) Soit $z(n) = y_1(-n)$. Alors z vérifie (E) par parité de q
de plus: $z(0) = y_1(0) = 1$ et $z'(0) = -y_1'(0) = 0$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz: $z = y_1$ donc y_1 est paire. De même pour y_2 .

Si $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$ alors $w' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = -q y_1 y_2 + q y_1 y_2 = 0$

Donc $w = w(0) = 1$ et $\det(A) = w(\pi) = 1$

(ii) D'autre part: $A^{-1}y(u) = y(u - \pi)$ donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$

Par le théorème de Cayley-Hamilton: $\chi_A(A) = A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$

donc $(A^2 - \text{tr}(A)A + I_2)A^{-1} = A - \text{tr}(A)I_2 + A^{-1} = 0$

Donc $A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}$ d'où $a = d$

Démonstration: 1) $\chi_A = X^2 - TX + 1$, $\Delta = T^2 - 4 = (T-2)(T+2)$

Si $|T| < 2$ alors χ_A admet 2 racines complexes conjuguées $p, \bar{p}$ de module 1 car $p\bar{p} = 1 = |p|^2$

Soit (u_1, u_2) une base de W formée de vecteurs propres de A :

$$A u_1(n) = u_1(n+\pi) = p u_1(n); \quad u_2(n+\pi) = \bar{p} u_2(n)$$

$\forall i=1,2, |u_i(n+\pi)| = |u_i(n)|$ donc u_i est bornée car elle est π -périodique et continue; toute solution u de (E) s'écrit: $u = \alpha u_1 + \beta u_2$ donc u est bornée.

$$\rightarrow \Delta = 0; \quad X_0 = \frac{T}{2} \rightarrow \chi_A = (X-1)^2 \text{ ou } (X+1)^2$$

2-2') Si $T = \pm 2$, (E) possède une solution non nulle u telle que $u(n+\pi) = \pm u_1(n)$ donc u est bornée (comme 1))

$$T = \pm 2 \Rightarrow a = d = \pm 1 \Rightarrow \det(A) = 1 = a^2 - bc = 1 - bc \Rightarrow bc = 0$$

$$\text{Si } bc = 0 \text{ alors } \det(A) = 1 = ad = a^2 \Rightarrow a = d = \pm 1 \Rightarrow T = \pm 2$$

$$\rightarrow 1 = p \times \mu \Rightarrow \mu = \frac{1}{p}; \quad (2)$$

3) Si $|T| > 2$ alors $\text{Sp}(A) = \{p, p^{-1}\}$ avec $p \in \mathbb{R}$ et $|p| > 1$. Soient u_1, u_2 fonctions propres associées à p et p^{-1} et y une solution non nulle de (E):

$$y = \alpha u_1 + \beta u_2 \text{ avec } \alpha \neq 0 \text{ ou } \beta \neq 0$$

$$\text{Si } \alpha \neq 0, \text{ soit } \alpha |u_1(n)| \neq 0; \quad y(n+\pi) = A^n y(n) = A^n (\alpha u_1(n) + \beta u_2(n))$$

$$= \alpha p^n u_1(n) + \beta p^{-n} u_2(n)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha p^n u_1(n) \rightarrow \pm \infty \quad \underset{n \rightarrow -\infty}{\sim}$$

donc y n'est pas bornée

$$\text{Si } \beta \neq 0, \text{ soit } \beta |u_2(n)| \neq 0; \quad y(n+\pi) \sim \beta p^{-n} u_2(n) \rightarrow \pm \infty \quad \underset{n \rightarrow -\infty}{\sim}$$

donc y n'est pas bornée.

$$(1) A: W \rightarrow W$$

$$y \mapsto y(\cdot + \pi)$$

$$W = \{ \text{espace des sol de (E)} \}$$

$$A y_1(n) = y_1(n+\pi) = a y_1(n) + b y_2(n) \quad (y(\cdot + \pi) \in W \text{ donc on découpe})$$

$$A y_2(n) = y_2(n+\pi) = c y_1(n) + d y_2(n)$$

$$\text{Pour } n=0; \quad y_1(\pi) = a; \quad y_2(\pi) = d$$

$$\text{En dérivant: } y_1'(n+\pi) = a y_1'(n) + b y_2'(n)$$

$$y_2'(n+\pi) = c y_1'(n) + d y_2'(n)$$

$$\text{for } n=0; \quad y_1'(\pi) = b \quad ; \quad y_2'(\pi) = c$$

$$\text{Mat}_{(y_1, y_2)}(A) = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A y_1 & A y_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{bmatrix}$$

② Si $|p| \leq 1$ alors $-1 \leq p \leq 1$ et $-1 \geq \frac{1}{p} \geq 1$

donc $0 \leq p + \frac{1}{p} \leq 0$ donc $p = -\frac{1}{p}$ donc $p^2 = -1$ ce qui n'est pas possible.