

## Équation de Burgers généralisée: Beek p. 36 214-222

Soient  $a, u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  /  $u_0$  et  $u_0'$  sont bornés. On pose  $c = a \circ u_0$ .

On cherche  $T > 0$  et  $(t, n) \mapsto u(t, n) \in C^1(\mathbb{J}-T, T] \times \mathbb{R})$  telle que

$$(P): \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \circ u \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \\ u(0, n) = u_0(n) \quad \forall n \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Analyse: a) Soit  $u$  une solution de (P). Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $y$  la

solution de (P): 
$$\begin{cases} y'(t) = a \circ u(t, y(t)) & (1) \\ y(0) = x \end{cases}$$

Montrons que  $t \mapsto u(t, y(t))$  est constante, et que  $y(t) = x + t c(x)$

Elle est  $C^1$  donc 
$$\frac{d}{dt} (u(t, y(t))) = \frac{\partial u}{\partial t} (t, y(t)) + y'(t) \frac{\partial u}{\partial n} (t, y(t))$$
$$= \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial t} + a \circ u \frac{\partial u}{\partial n} \right)}_{=0} (t, y(t))$$

Et :

$t \mapsto u(t, y(t))$  constante  $\Rightarrow y'$  constante par (1) donc

$$y'(t) = y'(0) \text{ donc } y(t) = y(0) + t y'(0) = x + t (a \circ u(0, x)) = x + t c(x)$$

b) Montrons que  $c$  est bornée :  $c'(n) = u_0'(n) a'(u_0(n)) \quad \forall n \in \mathbb{R}$

Or  $\exists B \in \mathbb{R}_+ / u_0(\mathbb{R}) \subset [-B, B]$  donc  $a' \circ u_0(\mathbb{R}) \subset [\tilde{B}, \tilde{B}]$  car  $[-B, B]$  est compact et  $a'$  est continue. Donc  $a' \circ u_0$  est bornée.

Donc  $c'$  est bornée

par échange de rôles

Soit  $M = \sup |c'| < +\infty$ . Si  $M = 0$  ; on pose  $T = +\infty$ , sinon

on pose  $T = \frac{1}{M}$ .

c) Montrons qu'il  $\exists \varphi : \mathbb{J}-T, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $C^1$  telle que  $\varphi(0, n) = x$  et  $u(t, n) = u_0 \circ \varphi(t, n) \quad \forall t \in \mathbb{J}-T, T], \forall n \in \mathbb{R}$ .

Par le point a);  $t \mapsto u(t, x + t c(x))$  est constante et vaut

$$u(0, x) = u_0(x) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ donc } u(t, x + t c(x)) = u_0(x) \quad \forall t \in ]-T, T[ \quad (2)$$

On veut alors exprimer  $x = \varphi(t, y)$  en fonction de  $y = x + t c(x)$

Appliquons la troisième dimension globale à  $F: ]-T, T[ \times \mathbb{R} \rightarrow ]-T, T[ \times \mathbb{R}$   
 $(t, x) \mapsto (t, x + t c(x))$

$$\text{Jacobian } F(t, x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c(x) & 1 + t c'(x) \end{pmatrix} \text{ donc } |\text{Jacobian } F(t, x)| = 1 + t c'(x) \neq 0 \text{ car}$$

$$|t c'(x)| \leq |t| \cap < 1$$

donc  $D_x F(t, x)$  est inversible  $\forall t \in ]-T, T[, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Il reste à montrer que  $F$  est injective: soient  $t_1, t_2, x_1, x_2$ :

$$F(t_1, x_1) = F(t_2, x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 \\ x_1 + t_1 c(x_1) = x_2 + t_2 c(x_2) \end{cases}$$

$$\text{donc } |x_1 - x_2| = |t_1| |c(x_1) - c(x_2)| \leq |t_1| \cap |x_1 - x_2| \text{ avec } |t_1| \cap < 1$$

$$\text{donc } x_1 = x_2$$

$$\text{Finalement: } \exists G \in C^1(]-T, T[ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) / \begin{cases} G \circ F(t, x) = (t, x) \\ F \circ G(t, y) = (t, y) \end{cases}$$

En particulier:  $G$  est de la forme  $(t, y) \mapsto (t, \varphi(t, y))$  où  $\varphi$  est  $C^1$

Or par (2),  $u \circ F(t, x) = u_0(x)$

$$\text{donc } u(t, x) = u(F \circ G(t, x)) = u(F(t, \varphi(t, x))) = u_0(\varphi(t, x))$$

$$\text{Comme } F(0, x) = (0, x) \text{ alors } G(0, x) = G(F(0, x)) = (0, x) \text{ donc } \varphi(0, x) = x$$

Synthèse: \* Unité:  $\varphi$  ne dépendant que de  $u_0$  et de  $a$  alors

$u = u_0 \circ \varphi$  montre l'unicité d'une éventuelle solution de (P) ] val

\* Existence: on vérifie que  $u = u_0 \circ \varphi$  est bien solution de (P)

$$\text{Rappel: } x = \varphi(t, y) = \varphi(t, x + t c(x)) = \varphi(t, F(t, x)) \quad (3)$$

$$\text{On a: } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} u_0' \circ \varphi \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} u_0' \circ \varphi$$

Comme  $as u = as u \circ \varphi = c \circ \varphi$  alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} + as u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} u' \circ \varphi + c \circ \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} u' \circ \varphi$$

$$= u' \circ \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \circ \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (4)$$

En dérivant (3) par rapport à  $t$ , on obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} (t, u) + c(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} (t, u) = 0$$

$$\text{donc } \frac{\partial \varphi}{\partial t} (t, \varphi(t, y)) + c(\varphi(t, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} (t, \varphi(t, y)) = 0$$

$$= f \circ G(t, y)$$

$$\text{donc } \frac{\partial \varphi}{\partial t} (t, y) + c(\varphi(t, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} (t, y) = 0$$

$$\text{donc (4) est nulle, et } u(t, u) = u(t, \varphi(t, y(t))) = u_0(x) \quad \square$$

① A retenir: (!!) Wikipédia

On cherche une courbe  $(x(t), t(t))$  selon laquelle l'EDP devient un EDO:

$$\frac{d}{ds} u(t(s), x(s)) = t'(s) \frac{\partial u}{\partial t} (t(s), x(s)) + x'(s) \frac{\partial u}{\partial x} (t(s), x(s)) \quad (*)$$

$$\text{Pour } t'(s) = 1 \text{ et } x'(s) = as u(t(s), x(s)) \text{ on a } (*) = 0$$

$$\text{En posant } t(s) = s \text{ alors } \begin{cases} t'(s) = 1 \\ x'(s) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(s) = s \\ x(s) = 0 \end{cases}$$

$$\text{En posant } x(s) = x \text{ alors } \begin{cases} x'(s) = as u(s, x(s)) \\ x(s) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(s) = x + t c(x) \\ x(s) = x \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{ On a } f: ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{N} \rightarrow ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{N}$$

Il suffit de voir  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ( $\varphi_t$ ) où  $\varphi_t: n \mapsto a + t c(n)$

$$\varphi_t'(n) = 1 + t c'(n) \quad \text{or } |t c'(n)| < 1 \text{ donc } \varphi_t'(n) > 0$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, |\varphi_t(n) - \varphi_t(0)| = |a + t c(n) - t c(0)| = |n + t (c(n) - c(0))|$$

$$= \left| \lambda \left( 1 + t \frac{c(u) - c(w)}{u - v} \right) \right|$$

$$= |\lambda| |1 + t c'(\tilde{u})| \geq |\lambda| |1 + t\eta| \\ \geq |\lambda| (|1| - |t\eta|)$$

$$\text{donc } |\Psi(tu)| \geq |\lambda| (1 - |t|\eta) - |\Psi(tw)| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

Comme  $\Psi$  est  $\Gamma$ , elle admet des bornes  $\pm\infty$

$$\text{Réciproquement : } \Psi(tu) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty \quad \Psi(tu) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} -\infty.$$