

Intégrale de Fresnel: Goursat p. 362 236-239

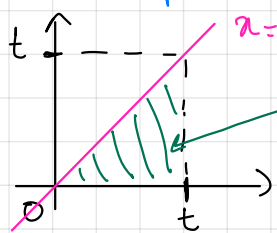
$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4}$$

Démonstration: 1) $t \geq 0$, on pose
$$\begin{cases} F(t) = \int_{[0,t]^2} e^{i(x^2+y^2)} dx dy \\ f(t) = \int_0^t e^{ix^2} dx \end{cases}$$

$(x,y) \mapsto e^{ix^2} e^{iy^2}$ est intégrable sur $[0,t]^2$ donc par le théorème de Fubini:

$$F(t) = \left(\int_0^t e^{ix^2} dx \right) \left(\int_0^t e^{iy^2} dy \right) = f(t)^2$$

D'autre part: $[0,t]^2$ admet $x=y$ comme axe de symétrie.



$$\Delta_t = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq t; 0 \leq y \leq x \}$$

$$\text{donc } f(t) = 2 \iint_{\Delta_t} e^{i(x^2+y^2)} dx dy$$

Passons en coordonnées polaires: $\varphi(r,\theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$; φ est un C^1 -difféomorphisme

$$K_t = \{ (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \pi/4] \mid 0 \leq r \cos(\theta) \leq t \text{ et } 0 \leq \theta \leq \pi/4 \}$$

$$= \left\{ (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \pi/4] \mid 0 \leq r \leq \frac{t}{\cos(\theta)} \right\} \text{ sur } \Delta_t$$

et $0 \leq r \sin(\theta) \leq r \cos(\theta)$
i.e. $0 \leq \tan(\theta) \leq 1$
i.e. $0 \leq \theta \leq \pi/4$

$$|\text{Jac } \varphi(r,\theta)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

$$= 2 \iint_{K_t} g(\varphi(r,\theta)) \times |\text{Jac } \varphi(r,\theta)| dr d\theta \text{ où } g = e^{i(x^2+y^2)}$$

donc $f(t) = 2 \iint_{K_t} e^{ir^2} r dr d\theta$. D'après le théorème de Fubini:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \int_0^{\pi/4} \int_0^{t/\cos(\theta)} e^{ir^2} r dr d\theta = \int_0^{\pi/4} \left[\frac{e^{ir^2}}{i} \right]_0^{t/\cos(\theta)} d\theta \\ &= i \int_0^{\pi/4} \left(-e^{it^2/\cos^2(\theta)} + 1 \right) d\theta = i \frac{\pi}{4} - i \int_0^{\pi/4} e^{it^2/\cos^2(\theta)} d\theta \end{aligned}$$

$$2) \text{ Pour } T > 0, \text{ on pose } I(T) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$\text{Par ce qui précède: } I(T) = i \frac{\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^T \int_0^{\pi/4} e^{it^2/\cos^2(\theta)} d\theta dt$$

d'après le théorème de Fubini : $I(T) = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^{\pi/4} \int_0^T e^{it^2/|\omega|} dt d\omega$ (*)

Passons le changement de variable : $x = \frac{t}{|\omega|}$ alors $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{|\omega|}$ on veut retrouver $f(\cdot)$
 et $t: 0 \rightarrow T \Rightarrow x: 0 \rightarrow \frac{T}{|\omega|}$

donc $I(T) = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^{\pi/4} |\omega| f\left(\frac{T}{|\omega|}\right) d\omega$ (*)

3) $\varphi = \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$ converge. En effet : $\forall A > 1, \int_1^A e^{ix^2} dx = \int_1^{A^2} e^{iu} \frac{du}{2\sqrt{u}}$ $u = x^2; \frac{du}{dx} = 2x = 2\sqrt{u}$
 $= \left[\frac{e^{iu}}{i} \times \frac{1}{2\sqrt{u}} \right]_1^{A^2} - \int_1^{A^2} \frac{e^{iu}}{i} \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times u^{-1/2-1} du$
 Convergence lorsque $A \rightarrow +\infty$ convergence absolument donc convergence lorsque $A \rightarrow +\infty$.

donc f est bornée en $+\infty$, et par (*), $I(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \frac{i\pi}{4}$

$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \varphi < +\infty$

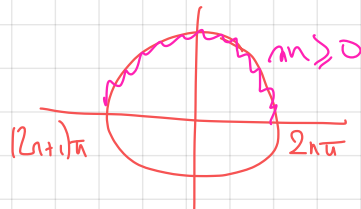
Or $I(T) = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$ et $|f(t)|^2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \varphi^2$ donc $I(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \varphi^2$
 moyenne de Cesaro de f^2

donc $\varphi^2 = \frac{i\pi}{4}$. On a donc déterminé φ au signe près : $\varphi = e^{i\pi/4} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\text{Im}(\varphi) = \int_0^{+\infty} \text{Im}\left(\frac{e^{iu}}{2\sqrt{u}}\right) du = \int_0^{+\infty} \text{Im}\left(\frac{\cos(u) + i\sin(u)}{2\sqrt{u}}\right) du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du \geq 0$

En effet : $\text{Im}(\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ où $a_n = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}}\right) du \geq 0$
 ≥ 0

donc $\varphi = e^{i\pi/4} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$



③ Bony p. 18 Théorème de Fubini : Soit f def sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$

a) Si f est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors :

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} |f(x,y)| dx dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)| dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}^p} |f(x,y)| dx \right] dy \in \overline{\mathbb{R}}$$

b) Si f est intégrable sur $\mathbb{R}^{p+q}$ alors les 3 membres ont un sens dans $\mathbb{C}$

le 3^e membre ont un sac $\Leftrightarrow$ pour $\mu p p y \in \mathbb{N}^q$, $a \mapsto f(a, y) \in L^1(\mu p)$

$\left\{ \begin{array}{l} \|f(y)\| = \int_{\mathbb{N}^p} |f(a, y)| da \text{ est inf } \mu p p \text{ et est} \\ \text{intégrable sur } \mathbb{N}^q. \end{array} \right.$

a) If f is a value class $\overline{m}_+$, $\int_{\mathbb{R}^2} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(\phi(x)) |\det \phi(x)| dx \in \overline{m}_+$

It is a secure algorithm

Ein effect: soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists N \in \mathbb{N}^+ \mid \forall n \geq N, |a_n - l| \leq \varepsilon$

Sei $k_n \geq n$, $|b_n - l| = \left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - l \right| \leq \frac{k}{n} + \varepsilon$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du &= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du + \int_{(2n+1)\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du \\ &= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du + \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(u+\pi)}{2\sqrt{u+\pi}} du = -\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u+\pi}} du \end{aligned}$$

$$dm = du$$

$$\mu: (2n+1)\pi \rightarrow 2(n+1)\pi \quad ; \quad \pi: 2n\pi \rightarrow 2(n+1)\pi - \pi$$

$$= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(u)}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}} \right) du$$

$$\begin{aligned} & \pi(2n+1) \\ &= (2n+1)\pi \end{aligned}$$