

Stabilité L^2 du schéma d'Euler explicite pour l'équation de la chaleur: Alaire p. 32

162-222 (~~242~~)

Équation de la chaleur sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^+$:

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \partial_{xx}^2 u = 0 & \forall (x,t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+ \\ u(t, x+1) = u(t, x) & \forall (x,t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+ \text{ condit}^o \text{ aux bords péri} \\ u(0, x) = u_0(x), \forall x \in \mathbb{T} & \text{condition initiale.} \end{cases}$$

Schéma d'Euler explicite:

$$(EE): \begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \nu \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0 & (*) \quad (7) \\ u_0^n = u_{J+1}^n & \forall n \in \mathbb{N}^+; \forall j \\ u_j^0 = u_0(x_j); j \in \{0, \dots, J+1\} & \text{donnée initiale} \end{cases}$$

- où :
- $\Delta t > 0, \Delta x = \frac{1}{J+1}; J \in \mathbb{N}^+$
 - $(t_n, x_j) = (n \Delta t, j \Delta x), n \in \mathbb{N}^+; j \in \{0, \dots, J+1\}$
 - u_j^n est une approximation de la solution exacte u au point (t_n, x_j) .

$x_{j+1/2} = (j+1/2) \Delta x = x_j + \frac{1}{2} \Delta x$



Alors (EE) est L^2 stable si $2\nu \Delta t \leq (\Delta x)^2$.

démonstration: (1) À chaque vecteur $u^n = (u_j^n)_{0 \leq j \leq J+1}$ on associe une fonction $u^n(x)$ constante par morceaux, périodique de période 1, définie sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^+$ par : $u^n(x) = u_j^n; x_{j-1/2} \leq x < x_{j+1/2} \quad \forall j$

où $x_{-1/2} = 0; x_{J+1+1/2} = 1$

Ainsi, $u^n(x) \in L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^+)$ et on peut donc la développer en série de Fourier : $u^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}^n(k) e^{2ik\pi x}$ avec $\hat{u}^n(k) = \int_0^1 u^n(x) e^{-2ik\pi x} dx$ (2)

Remarquons que si $v^n(x) = u^n(x + \Delta x)$ alors $\hat{v}^n(k) = \hat{u}^n(k) e^{2ik\pi \Delta x}$

Si on applique (*) à $u^n(x)$, on obtient :

$$u^{n+1}(x) = u^n(x) - \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} (-u^n(x - \Delta x) + 2u^n(x) - u^n(x + \Delta x))$$

Si on passe à la transformée de Fourier, on obtient :
 discrét : $\hat{u}^{n+1}(k) = \hat{u}^n(k) (1 - \nu \Delta t k^2)$
 $\Leftarrow$ on a donc aux coeff de Fourier

$$\begin{aligned}
 \hat{u}^{n+1}(h) &= \hat{u}^n(h) - \frac{\gamma \Delta t}{(\Delta x)^2} \left(-\hat{u}^n(h) e^{-2ikh\Delta x} + 2\hat{u}^n(h) - \hat{u}^n(h) e^{2ikh\Delta x} \right) \\
 &= \hat{u}^n(h) \left(1 - \frac{\gamma \Delta t}{(\Delta x)^2} (2 - 2\cos(2kh\Delta x)) \right) \\
 &= \hat{u}^n(h) \left(1 - 2 \frac{\gamma \Delta t}{(\Delta x)^2} \times 2 \sin(kh\pi\Delta x)^2 \right)
 \end{aligned}$$

$1 - \cos(2x) = 2\sin(x)^2$
4

Donc $\hat{u}^{n+1}(h) = A(h) \hat{u}^n(h) = A(h)^{n+1} \hat{u}^0(h)$ où $A(h) = 1 - 4 \frac{\gamma \Delta t}{(\Delta x)^2} \sin(kh\pi\Delta x)^2$

Donc $\hat{u}^n(h)$ est borné lorsque $n \rightarrow +\infty$ si $|A(h)| \leq 1$ i.e.:

$$|1 - 4 \frac{\gamma \Delta t}{(\Delta x)^2} \sin(kh\pi\Delta x)^2| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2 \gamma \Delta t \sin(kh\pi\Delta x)^2 \leq (\Delta x)^2 \quad (*)$$

⑤

or, si $2\gamma \Delta t \leq (\Delta x)^2$ est satisfaite alors $(*)$ est vérifié pour tout $h \in \mathbb{Z}$.

D'autre part, par la formule de Parseval ③ : $\|u^n\|_{L^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}^n(k)|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}^0(k)|^2 = \|u^0\|_{L^2}^2$

$\|u^n\|_{L^2}^2 = \sum_{j=0}^{J+1} \Delta x |u_j^n|^2$

⑥

② Si la condition n'est pas satisfaite, on prend $\Delta x, k_0$ et une donnée initiale ayant une seule composante de Fourier non nulle $\hat{u}^0(k_0) \neq 0$ tels que $\pi k_0 \Delta x \approx \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, on a $|A(k_0)| > 1$ et donc le schéma est instable $\Rightarrow$

① p. 37 On dit qu'un schéma aux diff est stable pour la norme l_p si il existe une constante $k > 0$ indep de Δx et Δt tq $\|u^n\|_p \leq k \|u^0\|_p \quad \forall n \geq 0$

où $\|u^n\|_p = \left(\sum_{j=0}^{J+1} \Delta x |u_j^n|^p \right)^{1/p}$ pour $1 \leq p < +\infty$ et $u^n = (u_j^n)$

Grâce à la pondération Δx , la norme $\|u^n\|_p$ est identique à la norme $l^p(0,1)$ pour les fct cte par morceaux sur $[u_j, u_{j+1}]$ ⑦

on dit que le schéma est conditionnellement stable si et si on vérifie une inégalité.

② Grandon p. 267 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T-périodique, C^∞ . on appelle ω de

Fourier de f les nb complexes def par: $\hat{f}(n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi n \frac{t}{T}} dt$

la serie de Fourier associe a f est $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n \frac{t}{T}}$

③ Beek p. 124 $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2$
 $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$

par unitaritee bij. En particulier:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

④ $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$$\cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2$$

donc $1 - \cos(2a) = 1 - \cos(a)^2 + \sin(a)^2$

$$= \cos(a)^2 + \sin(a)^2 - \cos(a)^2 + \sin(a)^2 = 2\sin(a)^2$$

⑤ $\left| 1 - 2 \frac{\gamma \theta}{\theta^2} \sin(k\pi \theta a)^2 \right| \leq 1 \quad (=)$

$$-1 \leq 1 - 4 \frac{\gamma \theta}{\theta^2} \sin(k\pi \theta a)^2 \leq 1 \quad (=) \quad -2 \leq -4 \frac{\gamma \theta}{\theta^2} \sin(k\pi \theta a)^2 \leq 0$$

$$(\Rightarrow) \quad 0 \leq 4 \frac{\gamma \theta}{\theta^2} \sin(k\pi \theta a)^2 \leq 2$$

$$(\Rightarrow) \quad 0 \leq 2 \frac{\gamma \theta}{\theta^2} \sin(k\pi \theta a)^2 \leq 1$$

$$(\Rightarrow) \quad 0 \leq 2 \gamma \theta \sin(k\pi \theta a)^2 \leq \theta a^2$$

⑥ $|\hat{u}^n(k)| = |\hat{A}(k) \hat{u}^0(k)| = \underbrace{|\hat{A}(k)|}_{=|A(k)|^n} |\hat{u}^0(k)| \leq |\hat{u}^0(k)|$
 $= |A(k)|^n \leq 1$

⑦ On cherche a approcher $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j)$:

$$\begin{aligned} u(t_n, x_{j-1}) &= u(t_n, x_j) + (x_{j-1} - x_j) \frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) + \frac{(x_{j-1} - x_j)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + o(\theta a^2) \\ &= u(t_n, x_j) - \theta a \frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) + \frac{\theta a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + o(\theta a^2) \end{aligned}$$

$$u(t_n, x_{j+1}) = u(t_n, x_j) + \theta a \frac{\partial u}{\partial x}(t_n, x_j) + \frac{\theta a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) + o(\theta a^2)$$

Donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) = \frac{u(t_n, x_{j-1}) + u(t_n, x_{j+1}) - 2u(t_n, x_j)}{(\Delta x)^2} + o(\Delta x^2)$

on cherche à approcher $\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j)$:

$$u(t_{n+1}, x_j) = u(t_n, x_j) + (t_{n+1} - t_n) \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) + o(\Delta t)$$

donc $\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) = \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} + o(\Delta t)$

Donc on peut le schéma:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \gamma \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} = 0$$

soit $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \gamma \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{\Delta x^2} = 0$

(1) $\|u^n\|_2^2 = \sum_{j=0}^{J+1} \Delta x |u_j^n|^2$

$$\|u^n\|_{L^2}^2 = \int_0^1 \underbrace{|u^n(x)|^2}_{= |u_j^n|^2} dx = \sum_{j=0}^{J+1} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} |u_j^n|^2 dx$$

pour $x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0}^{J+1} |u_j^n|^2 \underbrace{(x_{j+1/2} - x_{j-1/2})}_{(j+1/2)\Delta x - (j-1/2)\Delta x} \\ &= (j+1/2 - j+1/2)\Delta x = \Delta x \\ &= \sum_{j=0}^{J+1} \Delta x |u_j^n|^2 = \|u^n\|_2^2 \end{aligned}$$