Transformée de Fourier - Plancherel (Rudin ch.)

Théorème : Il existe un unique prolongement continu de la transformée de Fourier de $L^1 \cap L^2$ à L^2. De plus ce prolongement est une isométrie bijective de L^2 dans L^2.

Preuve : 1) Introduction de g : Soit $f \in L^1 \cap L^2$. On veut montrer que $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}g\|_2$. Soit $g = f * \check{\bar{f}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{f(t-x)}\, dt = (f ; \tau_{-x} f)_{L^2}$.

- Le produit scalaire est continu : $L^2 \times L^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ (Cauchy Schwarz) et $\mathbb{R} \to L^2$, $x \mapsto \tau_{-x} f$ aussi. Donc g est continue
- $|g(x)| \leq |(f ; \tau_{-x} f)_{L^2}| \leq \|f\|_2^2$ Donc g est borné
- f et $\check{\bar{f}}$ sont L^1. Donc g est L^1

2) $\mathcal{F}g$ et $g(0)$: $\mathcal{F}g = \mathcal{F}(f * \check{\bar{f}}) = \mathcal{F}f \times \mathcal{F}(\check{\bar{f}})$

Or, si $y \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\check{\bar{f}})(y) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-x)}\, e^{-2i\pi y x}\, dx = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(-x)\, e^{2i\pi y x}\, dx}$

$\displaystyle = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(u)\, e^{-2i\pi y u}\, du}$ ($u = -x$)

$= \overline{\mathcal{F}(f)(y)}$

Donc $\mathcal{F}g = \mathcal{F}f\, \overline{\mathcal{F}f} = |\mathcal{F}f|^2 \geq 0$

Et $\int \mathcal{F}g = \|\mathcal{F}f\|_2^2$ et $g(0) = \|f\|_2^2$.

3) $\int \mathcal{F}g = g(0)$.

Si $\delta > 0$, on pose $G_\delta(x) = e^{-\pi \delta x^2}$. $\xrightarrow{\text{Dans le plan}}$ $\mathcal{F}G_\delta(y) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\, e^{-\pi y^2/\delta}$

a) $g \in L^1$ et $G_\delta \in L^1$. Donc, $\varphi : (x ; y) \longmapsto g(x)\, G_\delta(y)\, e^{-2i\pi y x}$ est L^1.

D'après le théorème de Fubini $\int_{x \in \mathbb{R}} \left[\int_{y \in \mathbb{R}} \varphi(x ; y)\, dy \right] dx = \int_{y \in \mathbb{R}} \left[\int_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x ; y)\, dx \right] dy$.

Donc $\int_x \left(\int_y g(x)\, G_\delta(y)\, e^{-2i\pi y x}\, dy \right) dx = \int_x g(x)\, \mathcal{F}G_\delta(x)\, dx =$

$$= \int_{y} \left(\int_{x} G_\delta(y)\, g(x) e^{-2i\pi yx} dx \right) dy = \int_{y \in \mathbb{R}} G_\delta(y) \mathcal{F}g(y)\, dy$$

Donc $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}g\, G_\delta = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}G_\delta\, g$.

b) G_δ croît vers la fonction égale à 1 si $\delta \searrow 0$. et $\mathcal{F}g\, G_\delta(x) \geq 0$.
Donc d'après le théorème de convergence monotone,
$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}g\, G_\delta = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}g \left(\lim_{\delta \to 0} G_\delta \right) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}g.$$

c) $$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}G_\delta\, g = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-\pi x^2/\delta} dx \underset{x = u\sqrt{\delta}}{=} \int_{\mathbb{R}} g(u\sqrt{\delta}) e^{-\pi u^2} du$$

$|g(u\sqrt{\delta}) e^{-\pi u^2}| \leq \|g\|_\infty e^{-\pi u^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$.
Donc par le théorème de convergence dominée, $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}G_\delta\, g \xrightarrow[\delta \to 0]{} g(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u^2} = g(0)$

Donc $g(0) = \int \mathcal{F}g$ et $\|f\|_2^2 = \|\mathcal{F}g\|_2^2$.

4) Conclusion

Donc $\mathcal{F}$ est une isométrie entre $L^1 \cap L^2$ et L^2 ($\cup C^0$ et L^2 est complet)
On la prolonge $\mathcal{F}$ de manière unique en une fonction $\hat{}$: $L^2 \to L^2$ car $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2. $\hat{}$ est une isométrie.
De plus, si $f \in \mathcal{S}$, $\hat{\hat{f}} = \check{f}$. Donc, comme $\mathcal{S}$ est dense dans L^2, cette formule est vraie pour $f \in L^2$ et $\hat{}$ est bijective.